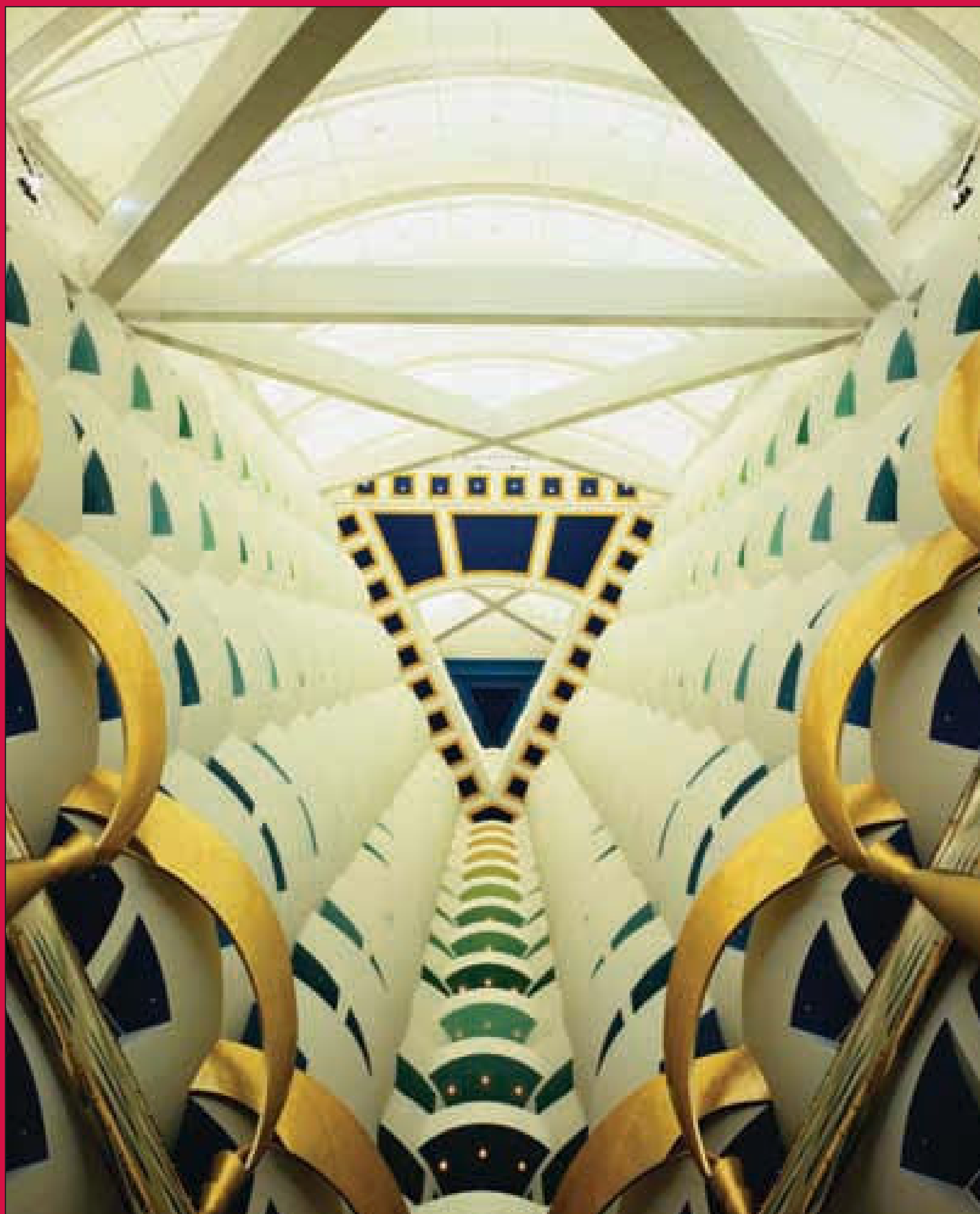
Cálculo diferencial e integral



NOVENA EDICIÓN

Pearson Prentice Hall

Purcell Varberg Rigdon

FORMAS HIPERBÓLICAS

78 $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

79 $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

80 $\int \tanh u\, du = \ln(\cosh u) + C$

81 $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

82 $\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

83 $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln\left|\tanh \frac{u}{2}\right| + C$

84 $\int \operatorname{senh}^2 u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u - \frac{u}{2} + C$

85 $\int \cosh^2 u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u + \frac{u}{2} + C$

86 $\int \tanh^2 u\, du = u - \tanh u + C$

87 $\int \coth^2 u\, du = u - \coth u + C$

88 $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

89 $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

90 $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

91 $\int csc\, u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

FORMAS ALGEBRAICAS DIVERSAS

92. $\int u(au + b)^{-1}\, du = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|au + b| + C$

93 $\int u(au + b)^{-2}\, du = \frac{1}{a^2}\left[\ln\triangle|au + b| + \frac{b}{au + b}\right] + C$

94 $\int u(au + b)^n\, du = \frac{u(au + b)^{n+1}}{a(n + 1)} - \frac{(au + b)^{n+2}}{a^2(n + 1)(n + 2)} + C \quad \text{si } n \neq -1, -2$

95 $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left(\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\right) \quad \text{si } n \neq 1$

96 $\int u\sqrt{au + b}\, du = \frac{2}{15a^2}(3au - 2b)(au + b)^{3/2} + C$

97 $\int u^n \sqrt{au + b}\, du = \frac{2}{a(2n + 3)}\left(u^n(au + b)^{3/2} - nb\int u^{n-1}\sqrt{au + b}\, du\right)$

98 $\int \frac{u\, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{3a^2}(au - 2b)\sqrt{au + b} + C$

99 $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{a(2n + 1)}\left(u^n\sqrt{au + b} - nb\int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{au + b}}\right)$

100a $\int \frac{du}{u\sqrt{au + b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{au + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{au + b} + \sqrt{b}}\right| + C \quad \text{si } b > 0$

100b $\int \frac{du}{u\sqrt{au + b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{au + b}{-b}} + C \quad \text{si } b < 0$

101 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{au + b}} = -\frac{\sqrt{au + b}}{b(n - 1)u^{n-1}} - \frac{(2n - 3)a}{(2n - 2)b}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{au + b}} \quad \text{si } n \neq 1$

102 $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

103 $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

104 $\int u^n\sqrt{2au - u^2}\, du = -\frac{u^{n-1}(2au - u^2)^{3/2}}{n + 2} + \frac{(2n + 1)a}{n + 2}\int u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}\, du$

105 $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{2au - ug^2}} = -\frac{u^{n-1}}{n}\sqrt{2au - u^2} + \frac{(2n - 1)a}{n}\int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{2au - u^2}}$

106 $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au - u^2} + a\operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

107 $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^n}\, du = \frac{(2au - u^2)^{3/2}}{(3 - 2n)au^n} + \frac{n - 3}{(2n - 3)a}\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{n-1}}\, du$

108 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{2au - u^2}} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(1 - 2n)u^n} + \frac{n - 1}{(2n - 1)a}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}}$

109 $\int (\sqrt{2au - u^2})^n\, du = \frac{u - a}{n + 1}(2au - u^2)^{n/2} + \frac{na^2}{n + 1}\int (\sqrt{2au - u^2})^{n-2}\, du$

110 $\int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^n} = \frac{u - a}{(n - 2)a^2}(\sqrt{2au - u^2})^{2-n} + \frac{n - 3}{(n - 2)a^2}\int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^{n-2}}$

INTEGRALES DEFINIDAS

111 $\int_0^{\infty} u^n e^{-u}\, du = \Gamma(n + 1) = n! \quad (n \geq 0)$

112 $\int_0^{\infty} e^{-au^2}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$

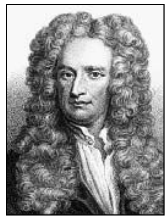
113 $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n u\, du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\, du = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n}\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es un entero par y } n \geq 2 \\[2ex] \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (n - 1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot n} & \text{si } n \text{ es un entero impar y } n \geq 3 \end{cases}$$

1600

1700

Descartes

Newton



Leibniz

Euler

J. Kepler (1571-1630)

R. Descartes (1596-1650)

B. Pascal (1623-1662)

I. Newton (1642-1727)

G. Leibniz (1646-1716)

L'Hôpital (1661-1704)

J. Bernoulli (1667-1748)

L. Euler (1707-1783)

M. Agnesi (1718-1799)

Kepler

Pascal

L'Hôpital

Bernoulli

Contribuidores del Cálculo

[El cálculo es] el resultado de una dramática lucha intelectual que ha durado los últimos veinticinco siglos.

—*Richard Courant*

1609 — Leyes de Kepler del movimiento planetario

1637 — Geometría analítica de Descartes

1665 — Newton descubre el cálculo

1696 — Primer texto de cálculo (L'Hôpital)

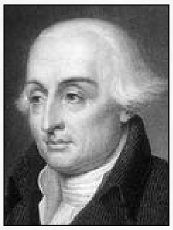
1728 — Euler introduce e

1800 **1900**

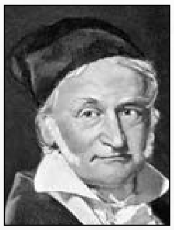
Otros contribuidores

Pierre de Fermat (1601-1665)
Michel Rolle (1652-1719)
Brook Taylor (1685-1731)
Colin Maclaurin (1698-1746)
Thomas Simpson (1710-1761)
Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)
George Green (1793-1841)
George Gabriel Stokes (1819-1903)

Lagrange

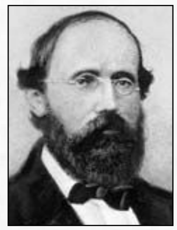


Gauss

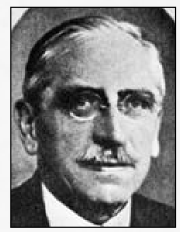


Cauchy

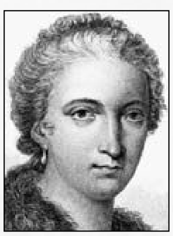
Riemann



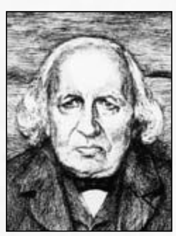
Lebesgue



J. Lagrange (1736-1813)
C. Gauss (1777-1855)
A. Cauchy (1789-1857)
K. Weierstrass (1815-1897)
G. Riemann (1826-1866)
J. Gibbs (1839-1903)
S. Kovalevsky (1850-1891)
H. Lebesgue (1875-1941)

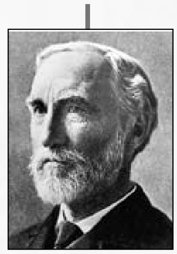


Agnesi



Weierstrass

Kovalevsky



Gibbs

1756 — Lagrange inicia su *Mécanique analytique*

1799 — Gauss demuestra el teorema fundamental del álgebra

1821 — Noción precisa de límite (Cauchy)

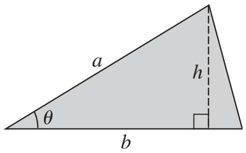
1854 — Integral de Riemann

1873 — e es trascendental (Hermite)

1902 — Integral de Lebesgue

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

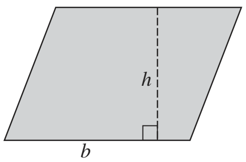
Triángulo



$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

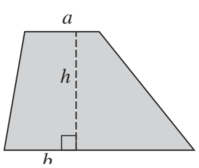
$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Paralelogramo



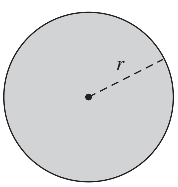
$$\text{Área} = bh$$

Trapecio



$$\text{Área} = \frac{a+b}{2}h$$

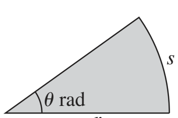
Círculo



$$\text{Circunferencia} = 2\pi r$$

$$\text{Área} = 2\pi r$$

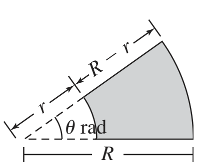
Sector circular



$$\text{Longitud de arco} = r\theta$$

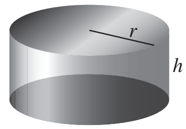
$$\text{Área} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Rectángulo polar



$$\text{Área} = \frac{R+r}{2}(R-r)\theta$$

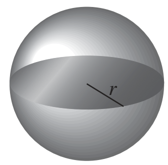
Cilindro circular recto



$$\text{Área lateral} = 2\pi rh$$

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

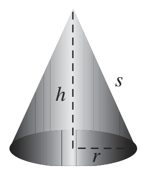
Esfera



$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

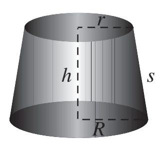
Cono circular recto



$$\text{Área lateral} = \pi rs$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

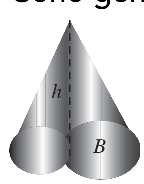
Tronco de un cono circular recto



$$\text{Área lateral} = \pi s(r+R)$$

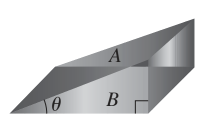
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h$$

Cono general



$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}(\text{área } B)h$$

Cuña



$$\text{Área } A = (\text{área } B) \sec \theta$$

Cálculo diferencial e integral

NOVENA EDICIÓN

Edwin J. Purcell
University of Arizona

Dale Varberg
Hamline University

Steven E. Rigdon
Southern Illinois University Edwardsville

Traducción:

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de actuaría, Universidad Anáhuac
ESFM-IPN

Revisión Técnica:

Linda Margarita Medina Herrera
Natella Antonyan
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad de México

Jorge Arturo Rodríguez Chaparro
Jefe del Departamento de Matemáticas
Colegio San Jorge de Inglaterra
Bogotá Colombia

PEARSON Educación ®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

PURCELL, EDWIN J., VARBERG, DALE;
RIGDON, STEVEN E.

Cálculo diferencial e integral

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2007

ISBN: 978-970-26-0989-6
Área: Bachillerato

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 520

ISBN 0131429248

Edición en español
Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Claudia C. Martínez Amigón
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

Edición en inglés

Acquisitions Editor: *Adam Jaworski*
Editor-in-Chief: *Sally Yagan*
Project Manager: *Dawn Murrin*
Production Editor: *Debbie Ryan*
Assistant Managing Editor: *Bayani Mendoza de Leon*
Senior Managing Editor: *Linda Mihatov Behrens*
Executive Managing Editor: *Kathleen Schiaparelli*
Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Director of Marketing: *Patrice Jones*
Executive Marketing Manager: *Halee Dinsey*
Marketing Assistant: *Joon Won Moon*
Development Editor: *Frank Purcell*
Editor-in-Chief, Development: *Carol Trueheart*
Art Director: *Heather Scott*
Interior Designer: *Judith Matz-Coniglio*
Cover Designer: *Tamara Newnam*
Art Editor: *Thomas Benfatti*
Creative Director: *Juan R. López*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Manager, Cover Visual Research & Permissions: *Karen Sanatar*
Director, Image Resource Center: *Melinda Reo*
Manager, Rights and Permissions: *Zina Arabia*
Manager, Visual Research: *Beth Brenzel*
Image Permission: *Vickie Menanteaux*
Cover Photo: *Massimo Listri/Corbis; Interior view of Burj Al Arab Hotel, Dubai, United Arab Emirates*

NOVENA EDICIÓN, 2007

Atlacomulco 500-5to. piso
Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

PEARSON Educación ®

ISBN 10: 970-26-0989-5
ISBN 13: 978-970-26-0989-6

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 10 09 08 07

A
Pat, Chris, Mary y Emily

Contenido

Agradecimientos

Agradecemos a todos los profesores que han sido leales usuarios y han impartido la materia de Cálculo en los países de habla hispana con el apoyo del reconocido libro de Purcell. Sus valiosos comentarios han servido para enriquecer el desarrollo de la actual edición. Esperamos que con el uso de este texto cumplan satisfactoriamente los objetivos del programa del curso y preparen a sus alumnos para enfrentar los retos actuales dentro del ámbito de las matemáticas. En especial deseamos agradecer el apoyo y retroalimentación que nos han dado los siguientes profesores:

COLOMBIA

Clermont
Mauricio Roa

Colegio Agustiniano Ciudad Salitre
Hugo Hernán Rubio

Colegio Agustiniano de Suba
John Jairo Suárez

Colegio Agustiniano Norte
Yazmín Castro

Colegio Bautista
Luis Hernando López

Colegio Berchmans
Arnaldo Ruiz

Colegio Calasanz
Armando Villamizar

Colegio Calatrava
Francisco Valderrama

Colegio Cervantes Norte
Juan Lizárraga

Colegio del Rosario Santo Domingo
Rosalba Corredor

Colegio El Pinar
Freddy Mondragón

Colegio Emmanuel D'alzon
Alexis Valencia

Colegio Franciscano De Pio Xii
José Luis Pérez

Colegio Hispanoamericano
Raúl Vacca
Marabely Ramírez

Colegio Jordán de Sajonia
José Romero

Colegio Nuestra Señora del Rosario
Gloria Aguilar

Colegio San Antonio María Claret
Patricia Duarte

Colegio San Patricio
Jorge Enrique Peña

Colegio Santa Clara
Luis Villamizar

Colegio Santa Dorotea
Octavio Cambindo

Gimnasio Británico
José Vicente Contreras
John Jairo Estrada

Gimnasio La Arboleda
Esperanza Sánchez

Gimnasio La Montaña
Claudia Rodríguez

Gimnasio Los Andes
Martín Tello

Gimnasio Moderno
Hugo Hernán Chávez López

Inst. San Bernardo de La Salle
Augusto Vivas

Instituto Colsubsidio de Educación Femenina ICEF
Yolanda Cruz

Nuevo Colombo Británico
Astrid Torregrosa

Portales
Zulema León

Rosario Quinta Mutis
Wilson Alcántara

San Facon
Aura Beatriz García

San Patricio
Jorge Peña

San Tarsicio
Jorge Velasco

MÉXICO

CEBETIS # 225
Uriel García Rico

CECyT # 9
Hermenegildo Barrera Hernández
Ubaldo Bonilla Jiménez

CETI-Colomos
Jesús Salvador Escobedo Solís
Asunción González Loza
Francisco Javier Hernández Patiño
Patricia Lamas Huerta
Óscar Mesina Reyes
Ángel Villagrana Villa

Colegio Anáhuac Chapalita
Humberto Contreras Pérez

Prefacio

De nuevo, la novena edición de *Cálculo* es una revisión modesta. Se han agregado algunos temas y otros se han reacomodado, pero el espíritu del libro ha permanecido sin alteraciones. Los usuarios de las ediciones precedentes nos han informado del éxito que tuvieron y no tenemos la intención de restarle ventajas a un texto bastante viable.

Para muchos, este libro aún será considerado como un texto tradicional. En su mayoría, se demuestran los teoremas, se dejan como ejercicio o se dejan sin demostrar cuando la comprobación es demasiado difícil. Cuando esto último sucede, tratamos de dar una explicación intuitiva para que el resultado sea plausible, antes de pasar al tema siguiente. En algunos casos, damos un bosquejo de una demostración, en cuyo caso explicamos por qué es un bosquejo y no una demostración rigurosa. El objetivo sigue siendo la comprensión de los conceptos de cálculo. Aunque algunos ven al énfasis en la presentación clara y rigurosa como una distracción para la comprensión del cálculo, nosotros vemos que ambas son complementarias. Es más probable que los estudiantes comprendan los conceptos si los términos se definen con nitidez y los teoremas se enuncian y demuestran claramente.

Un texto breve La novena edición continúa siendo la obra más breve de los principales textos de cálculo exitosos. Hemos tratado de no saturar el texto con temas nuevos y enfoques alternativos. En menos de 800 páginas tratamos la mayor parte de los temas de cálculo; entre ellos, un capítulo preliminar y el material de límites a cálculo vectorial. En décadas recientes, los estudiantes han desarrollado malos hábitos. Desean encontrar el ejemplo resuelto de modo que coincida con el problema de su tarea. Nuestro objetivo con este texto continúa manteniendo al cálculo como un curso centrado en determinadas ideas básicas en torno a palabras, fórmulas y gráficas. La resolución de los conjuntos de problemas, crucial para el desarrollo de habilidades matemáticas, no debe eclipsar el objetivo de comprensión del cálculo.

Problemas de revisión de conceptos Para alentar a los estudiantes a leer y entender el texto, a cada conjunto de problemas le preceden cuatro cuestiones para completar. Éstas prueban el dominio del vocabulario básico, comprensión de los teoremas y la habilidad para aplicar los conceptos en contextos más sencillos. Los estudiantes deben responder estos cuestionamientos antes de pasar a los problemas siguientes. Fomentamos esto para dar una retroalimentación inmediata; las respuestas correctas se proporcionan al final del conjunto de problemas. Estos puntos también hacen algunas preguntas de examen para ver si los estudiantes han hecho la lectura necesaria y están preparados para la clase.

Problemas de repaso e introducción También hemos incluido un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente. Muchos de estos problemas obligan a los estudiantes a repasar temas anteriores antes de iniciar el nuevo capítulo. Por ejemplo.

- Capítulo 3, Aplicaciones de la derivada: se les pide a los estudiantes resolver desigualdades como las que surgen cuando preguntamos en dónde una función es creciente/decreciente o cóncava hacia arriba/hacia abajo.
- Capítulo 7, Técnicas de integración: se les pide a los estudiantes evaluar varias integrales que incluyen el método de sustitución, la única técnica significativa que han aprendido hasta ese momento. La falta de práctica en la aplicación de esta técnica podría significar un desastre en el capítulo 7.

Otros problemas de repaso e introducción piden a los estudiantes utilizar lo que ya conocen para obtener una ventaja en el capítulo siguiente. Por ejemplo,

- Capítulo 5, Aplicaciones de la integral: se les pide a los estudiantes determinar la longitud de un segmento de línea entre dos funciones, exactamente la habilidad que se requiere en el capítulo para realizar lo que llamaremos *rebanar, aproximar* e *integrar*. Además, se les pide a los estudiantes determinar el volumen de un disco pequeño, una arandela y un cascarón. Al haber resuelto esto antes de iniciar el capítulo los estudiantes estarán mejor preparados para comprender la idea de *rebanar, aproximar* e *integrar,* y su aplicación para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

- Capítulo 8, Formas indeterminadas e integrales impropias: se les pide a los estudiantes calcular el valor de una integral como $\int_0^a e^{-x}\,dx$, para $a = 1, 2, 4, 8, 16$. Esperamos que los estudiantes resuelvan un problema como éste y se den cuenta de que conforme a crece, el valor de la integral se aproxima a 1; de este modo se establece la idea de integrales impropias. Antes del capítulo, hay problemas similares que incluyen sumas sobre series infinitas.

Sentido numérico El sentido numérico continúa desempeñando un papel importante en el texto. Todos los estudiantes de cálculo cometen errores numéricos al resolver problemas, pero aquellos con sentido numérico reconocen una respuesta absurda y tratan de resolver nuevamente el problema. Para impulsar y desarrollar esta importante habilidad, hemos enfatizado el proceso de estimación. Sugerimos cómo hacer estimaciones mentalmente y cómo llegar a las respuestas numéricas aproximadas. En el texto hemos aumentado el uso de esta característica mediante el símbolo $\boxed{\approx}$, en donde se hace una aproximación numérica. Esperamos que los estudiantes hagan lo mismo, en especial en los problemas con el icono $\boxed{\approx}$.

Uso de tecnología Muchos problemas en la novena edición están marcados con uno de los siguientes símbolos:

$\boxed{\text{C}}$ indica que sería útil una calculadora científica ordinaria.

$\boxed{\text{GC}}$ indica que se requiere una calculadora gráfica.

$\boxed{\text{CAS}}$ indica que se necesita un sistema de álgebra computacional.

Los proyectos de tecnología que estaban al final de los capítulos en la octava edición, ahora están disponibles en la Web en archivos PDF.

Cambios en la novena edición La estructura básica y el espíritu primordial del texto han permanecido sin cambio. A continuación están los cambios más importantes en la novena edición.

- Hay un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente.
- El capítulo preliminar, ahora denominado capítulo 0, se ha condensado. Los temas de “precálculo” (que en la octava edición estaban al inicio del capítulo 2) se colocaron ahora en el capítulo 0. En la novena edición, el capítulo 1 inicia con límites. Todo lo que se requiera estudiar del capítulo 0 depende de los antecedentes de los estudiantes y variará de una institución educativa a otra.
- Las secciones sobre antiderivadas y una introducción a ecuaciones diferenciales se han cambiado al capítulo 3. Esto permite claridad entre los conceptos de “tasa de cambio” y “acumulación”, ya que ahora el capítulo 4 inicia con área, seguida de inmediato con la integral definida y los teoremas fundamentales del cálculo. “La experiencia del autor ha sido que muchos estudiantes de primer año se equivocan al hacer una distinción clara entre los diferentes conceptos de la integral indefinida (o antiderivada) y la integral definida como el límite de una suma”. Esto fue en la primera edición, publicada en 1965, y sigue siendo cierto ahora. Esperamos que al separar estos temas se atraerá la mirada a la distinción.
- Probabilidad y presión de fluidos se agregó al capítulo 5, Aplicaciones de la integral. Enfatizamos que los problemas de probabilidad son tratados como problemas de masa a lo largo de una recta. El centro de masa es la integral de x por la

densidad, y la esperanza en probabilidad es la integral de *x* por la densidad (probabilidad).

- El material sobre secciones cónicas se ha resumido de cinco secciones a tres. Los estudiantes han visto mucho (si no es que todo) de este material en sus cursos de precálculo.
- Hay ejemplos y un ejercicio sobre las leyes de Kepler del movimiento planetario. El material sobre vectores termina en la deducción de las leyes de Kepler a partir de la ley de Newton de la gravitación. Deducimos la segunda y tercera leyes de Kepler en los ejemplos, y dejamos como ejercicio la primera ley. En esta práctica, se guía a los estudiantes a través de los pasos, (a) a (l), de la deducción.
- Las secciones sobre métodos numéricos se han colocado en lugares apropiados a lo largo del texto. Por ejemplo, la sección sobre la resolución de ecuaciones de forma numérica se ha convertido en la sección 3.7, la integración numérica es la sección 4.6; las aproximaciones para ecuaciones diferenciales se convirtieron en la sección 6.7.
- El número de preguntas de conceptos se ha incrementado de manera significativa. Muchos problemas más preguntan al estudiante acerca de gráficas. También hemos aumentado el uso de métodos numéricos, tal como el método de Newton y la integración numérica, en problemas que no pueden tratarse de manera analítica.

Agradecimientos Quisiera agradecer al equipo de Prentice Hall, incluyendo a Adam Jaworski, Eric Franck, Dawn Murrin, Debbie Ryan, Bayani deLeon, Sally Yagan, Halee Dinsey, Patrice Jones, Heather Scott y Thomas Benfatti por su apoyo y paciencia. También deseo agradecer a quienes leyeron el manuscrito cuidadosamente, entre ellos, Frank Purcell, Brad Davis, Pat Daly (compañía Paley) y Edith Baker (Writewith, Inc.). Tengo una gran deuda de gratitud con Kevin Bodden y Christopher Rigdon, quienes trabajaron sin descanso en la preparación de los manuales de soluciones, y con Bárbara Kniepkamp y Brian Rife por la preparación de las respuestas del final del libro. Además, quiero agradecer a los profesores de la Southern Illinois University Edwardsville (y de otros lugares), en especial a George Pelekanos, Rahim Karimpour, Krzysztof Jarosz, Alan Wheeler y Paul Phillips, por sus valiosos comentarios.

También agradezco a los siguientes profesores por su cuidadosa revisión y útiles comentarios durante la preparación de la novena edición.

Fritz Keinert, Iowa State University
Michael Martin, Johnson County Community College
Christopher Johnston, University of Missouri-Columbia
Nakhle Asmar, University of Missouri-Columbia
Zhonghai Ding, University de Nevada Las Vegas
Joel Foisy, SUNY Potsdam
Wolfe Snow, Brooklyn College
Ioana Mihaila, California State Polytechnic University, Pomona
Hasan Celik, California State Polytechnic University
Jeffrey Stopple, University of California, Santa Barbara
Jason Howell, Clemson University
John Goulet, Worcester Polytechnic Institute
Ryan Berndt, The Ohio State University
Douglas Meade, University of South Carolina
Elgin Johnston, Iowa State University
Brian Snyder, Lake Superior State University
Bruce Wenner, University of Missouri-Kansas City
Linda Kilgariff, University of North Carolina en Greensboro
Joel Robbin, University of Wisconsin-Madison
John Johnson, George Fox University
Julie Connolly, Wake Forest University
Chris Peterson, Colorado State University
Blake Thornton, Washington University en Saint Louis
Sue Goodman, University of North Carolina-Chapel Hill
John Santomos, Villanova University

Por último, agradezco a mi esposa Pat y a mis hijos Chris, Mary y Emily por tolerar todas las noches y fines de semana que estuve en la oficina.

S. E. R.
srigdon@siue.edu
Southern Illinois University Edwardsville

RECURSOS PARA LOS PROFESORES (EN INGLÉS)

Distribución de recursos para el profesor

Todos los recursos para el profesor pueden descargarse del sitio **web www.pearsoneducacion.net/purcell** Seleccione "Browse our catalog", luego dé clic en "Mathematics", seleccione su curso y elija su texto. En "Resources", en el lado izquierdo, elija "instructor" y el complemento que necesita descargar. Se le pide que realice un registro antes de que pueda completar este proceso.

- ***TestGen***
  Crea con facilidad exámenes a partir de secciones del texto. Las preguntas se generan con un algoritmo que permite versiones ilimitadas. Edite problemas o genere los propios.
- ***Archivo con preguntas de examen***
  Un banco de exámenes obtenidos de TestGen.
- ***Diapositivas en PowerPoint de Clases***
  Son diapositivas que se pueden editar por completo y van de acuerdo con el texto. Proyectos en clase o para un website en un curso en línea.
- ***Manual de soluciones para el profesor***
  Soluciones totalmente desarrolladas de todos los ejercicios del libro y los proyectos del capítulo.
- ***Proyectos de tecnología***

MathXL$^{®}$

MathXL$^{®}$ es un poderoso sistema en línea para tareas, tutoriales y asignaciones que acompaña a su libro de texto. Los instructores pueden crear, editar y asignar tareas y exámenes en línea mediante ejercicios generados por medio de un algoritmo y que estén correlacionados al nivel de objetivo para el texto. El trabajo del estudiante es seguido en un registro de avance. Los estudiantes pueden hacer exámenes de capítulo y recibir planes de estudio personalizados con base en sus resultados. El plan de estudio diagnostica las debilidades y vincula a los estudiantes con ejercicios por objetivos que necesitan. Además, los estudiantes pueden tener acceso a videoclips de los ejercicios seleccionados. MathXL$^{®}$ está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio web en **www.pearsoneducacion.net/purcell,**

MyMathLab

MyMathLab es un curso en línea personalizable, de texto específico, para sus libros. MyMathLab está sustentado por el ambiente en línea de enseñanza y aprendizaje CourseCompass^{TM} de Pearson Educación, y por MathXL$^{®}$ nuestro sistema de tareas, tutoriales y evaluación en línea. MyMathLab le proporciona las herramientas necesarias para poner todo o parte de su curso en línea, si sus estudiantes están en un laboratorio o trabajando en casa.

MyMathLab proporciona un conjunto rico y flexible de materiales para el curso, con la característica que los ejercicios de respuesta abierta son generados de manera algorítmica para práctica ilimitada. Los estudiantes pueden utilizar las herramientas en línea, tales como clases en video y un libro de texto en multimedia para mejorar su desempeño. Los instructores pueden utilizar los administradores de tareas y exámenes de MyMathLAb para seleccionar y asignar ejercicios en línea relacionados con el libro, y pueden importar exámenes de TestGen para agregar flexibilidad. El único archivo de calificaciones —diseñado específicamente para matemáticas— lleva un registro automático de tareas y resultados de exámenes de los estudiantes y le permite al instructor el cálculo de las evaluaciones finales. MyMathLab está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio web en **www.pearsoneducacion.net/purcell**

CAPÍTULO 0 Preliminares

0.1 Números reales, estimación y lógica

El cálculo está basado en el sistema de los números reales y sus propiedades. Pero, ¿cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder, comenzamos con algunos sistemas numéricos más sencillos.

Los enteros y los números racionales Los números más sencillos de todos son los **números naturales,**

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Con ellos podemos *contar* nuestros libros, nuestros amigos y nuestro dinero. Si incluimos a sus negativos y al cero, obtenemos los **enteros**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando *medimos* longitud, peso o voltaje, los enteros son inadecuados. Están separados muy lejos uno del otro para dar suficiente precisión. Esto nos lleva a considerar cocientes (razones) de enteros (véase la figura 1), números tales como

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2}, \text{ y } \frac{-17}{1}$$

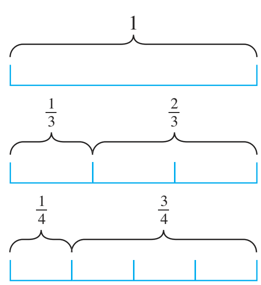


Figura 1

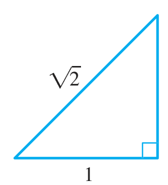


Figura 2

Observe que incluimos $\frac{16}{2}$ y $\frac{-17}{1}$, aunque normalmente los escribiríamos como 8 y -17, ya que son iguales a aquéllos por el significado ordinario de la división. No incluimos $\frac{5}{0}$ o $\frac{-9}{0}$ porque es imposible dar significado a estos símbolos (véase el problema 30). Recuerde siempre que la división entre 0 nunca está permitida. Los números que pueden escribirse en la forma m/n, donde m y n son enteros con $n \neq 0$ son llamados **números racionales**.

¿Los números racionales sirven para medir todas las longitudes? No. Este hecho sorprendente fue descubierto por los antiguos griegos alrededor del siglo V a. C. Ellos demostraron que aunque la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ (véase la figura 2), $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de dos enteros (véase el problema 77). Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número **irracional** (no racional). Así, también lo son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, π, y una gran cantidad de números más.

Los números reales Considere todos los números (racionales e irracionales) que pueden medir longitudes, junto con sus negativos y el cero. A éstos les llamamos **números reales**.

Los números reales pueden verse como etiquetas para puntos a lo largo de una recta horizontal. Allí miden la distancia, a la derecha o izquierda (la **distancia dirigida**), de un punto fijo llamado **origen** y marcado con 0 (véase la figura 3). Aunque quizá no

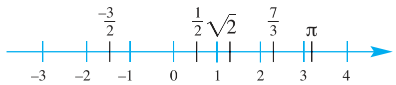


Figura 3

podamos mostrar todas las etiquetas, cada punto tiene un número real único que lo etiqueta. Este número se denomina **coordenada** del punto, y la recta coordenada resultante es llamada **recta real**. La figura 4 sugiere las relaciones entre las series de números analizadas hasta ahora.

Recuerde usted que el sistema de números reales puede ampliarse aún más a los **números complejos**. Éstos son números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En este libro rara vez se utilizarán los números complejos. De hecho, si decimos o sugerimos *número* sin adjetivo calificativo alguno, se puede suponer que queremos decir número real. Los números reales son los personajes principales en cálculo.

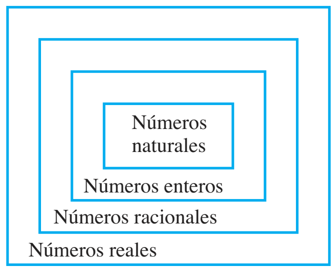


Figura 4

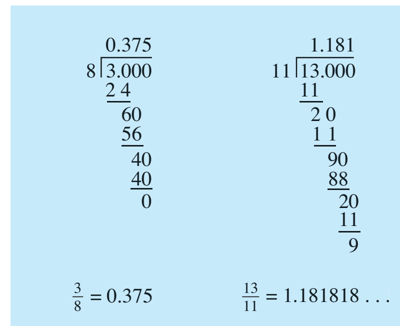


Figura 5

Decimales periódicos y no periódicos Cualquier número racional puede escribirse como decimal, ya que por definición siempre puede expresarse como el cociente de dos enteros; si dividimos el denominador entre el numerador, obtenemos un decimal (véase la figura 5). Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{3}{8} = 0.375 \qquad \frac{3}{7} = 0.428571428571428571\ldots$$

Los números irracionales también pueden expresarse en forma decimal. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots, \qquad \pi = 3.1415926535\ldots$$

La representación decimal de un número racional o termina (como en $\frac{3}{8} = 0.375$) o se repite hasta el infinito en ciclos regulares (como en $\frac{13}{11} = 1.181818\ldots$). Un poco de experimentación con el algoritmo de la división le mostrará el porqué. (Observe que sólo puede haber un número finito de residuos diferentes). Un decimal que termina puede considerarse como un decimal periódico con ceros que se repiten. Por ejemplo,

$$\frac{3}{8} = 0.375 = 0.3750000\ldots$$

De esta manera, todo número racional puede escribirse como un decimal periódico. En otras palabras, si x es un número racional, entonces x puede escribirse como un decimal periódico. Es notable el hecho de que el recíproco también es verdadero, si x puede escribirse como un decimal periódico, entonces x es un número racional. Esto es obvio en el caso de decimales que terminan (por ejemplo, $3.137 = 3137/1000$), y es fácil demostrar para el caso de decimales no periódicos.

EJEMPLO 1 **(Los decimales periódicos son racionales)**. Demuestre que $x = 0.136136136\ldots$ representa un número racional.

SOLUCIÓN Restamos x de $1000x$ y luego despejamos x.

$$\begin{aligned} 1000x &= 136.136136\ldots \\ x &= 0.136136\ldots \\ \hline 999x &= 136 \\ x &= \frac{136}{999} \end{aligned}$$

■

Los números reales

Números racionales (decimales periódicos)	Números irracionales (decimales no periódicos)

Figura 6

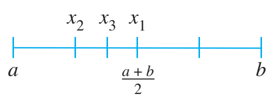


Figura 7

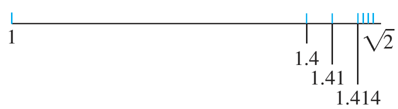


Figura 8

Muchos problemas en este libro están marcados con un símbolo especial.

C significa utilice una calculadora.

GC significa utilice una calculadora graficadora.

CAS significa utilice un sistema de álgebra computacional.

EXPL significa que el problema le pide explorar e ir más allá de las explicaciones dadas en el texto.

Las representaciones decimales de los números irracionales no se repiten en ciclos. Recíprocamente, un decimal no periódico debe representar un número irracional. Así, por ejemplo,

$$0.101001000100001\ldots$$

debe representar un número irracional (observe el patrón de más y más ceros entre los unos). El diagrama en la figura 6 resume lo que hemos dicho.

Densidad Entre cualesquiera dos números reales diferentes a y b, no importa qué tan cercanos se encuentren, existe otro número real. En particular, el número $x_1 = (a + b)/2$ es un número real que está a la mitad entre a y b (véase la figura 7). Ya que existe otro número real, x_2, entre a y x_1, y otro número real, x_3, entre x_1 y x_2, y puesto que este argumento puede repetirse *ad infinitum*, concluimos que existe un número infinito de números reales entre a y b. Por lo tanto, no existe cosa como "el menor número real, mayor que 3".

En realidad, podemos decir más. Entre cualesquiera dos números reales distintos existe tanto un número racional como uno irracional. (En el ejercicio 57 le pedimos demostrar que existe un número racional entre cualesquiera dos números reales). De aquí que, por medio del argumento precedente, existe una infinidad de cada uno de ellos (racionales e irracionales).

Una forma en que los matemáticos describen la situación que hemos expuesto es declarar que los números racionales y los números irracionales son **densos** en la recta real. Todo número tiene vecinos racionales e irracionales arbitrariamente cercanos a él.

Una consecuencia de la propiedad de densidad es que cualquier número irracional puede aproximarse tanto como se quiera por medio de un número racional; de hecho, por medio de un número racional con una representación decimal finita. Tome como ejemplo $\sqrt{2}$. La sucesión de números racionales 1, 1.4, 1.41, 1414, 1.4142, 1.41421, 1.414213,... avanza constante e inexorablemente hacia $\sqrt{2}$ (véase la figura 8). Avanzando lo suficiente en esta sucesión, podemos estar tan cerca como queramos de $\sqrt{2}$.

Calculadoras y computadoras Actualmente, muchas calculadoras son capaces de realizar operaciones numéricas, gráficas y simbólicas. Durante décadas, las calculadoras han podido realizar operaciones numéricas, como dar aproximaciones decimales a $\sqrt{12.2}$ y 1.25 sen 22°. A principios de los años noventa del siglo pasado las calculadoras podían mostrar la gráfica de casi cualquier función algebraica, trigonométrica, exponencial o logarítmica. Los adelantos recientes permiten a las calculadoras realizar muchas operaciones, como desarrollar $(x - 3y)^{12}$ o resolver $x^3 - 2x^2 + x = 0$. Programas de cómputo como *Mathematica* o *Maple* pueden realizar operaciones simbólicas como éstas, así como una gran cantidad de otras.

Nuestras recomendaciones acerca del uso de una calculadora son:

1. Sepa reconocer cuando su calculadora —o computadora— le proporciona una respuesta exacta y cuando le da una aproximación. Por ejemplo, si pide sen 60°, su calculadora puede darle la respuesta exacta, $\sqrt{3}/2$, o bien puede darle una aproximación decimal, 0.8660254.
2. Por lo regular, y si es posible, se prefiere una respuesta exacta. Esto es especialmente cierto cuando usted debe utilizar el resultado para cálculos posteriores. Por ejemplo, si necesita elevar al cuadrado sen 60°, es más fácil y también más exacto, calcular $\left(\sqrt{3}/2\right)^2 = 3/4$ que calcular 0.8660254^2.
3. Si es posible, en problemas de aplicación proporcione una respuesta exacta, así como una aproximación. Puede verificar frecuentemente si su respuesta es razonable al relacionarla con la descripción del problema, observando su aproximación numérica a la solución.

Estimación Dado un problema aritmético complicado, un estudiante descuidado podría presionar algunas teclas en una calculadora y reportar la respuesta sin darse cuenta de que la falta de paréntesis o un "error de dedo" han dado un resultado erróneo. Un estudiante cuidadoso, con un sentido de los números, al presionar las mismas teclas se dará cuenta inmediatamente de que la respuesta es equivocada si es demasiado grande o demasiado pequeña, y volverá a calcularla de manera correcta. Es importante saber cómo se realiza una estimación mental.

EJEMPLO 2 Calcular $\left(\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}\right)/2.75$.

SOLUCIÓN Una estudiante juiciosa aproximó lo anterior como $(20 + 72 + 2)/3$ y dijo que la respuesta debería ser cercana a 30. Así, cuando su calculadora dio 93.448 como respuesta, ella desconfió (lo que en realidad había calculado fue $\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5/2.75}$).

Al calcular otra vez obtuvo la respuesta correcta: 34.434. ■

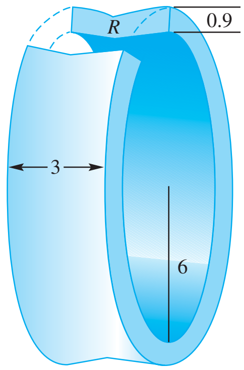


Figura 9

EJEMPLO 3 Suponga que la región sombreada R, que se muestra en la figura 9, se hace girar alrededor del eje x. Estime el volumen del anillo sólido, S, que resulta.

SOLUCIÓN La región R es de casi 3 unidades de largo y 0.9 unidades de altura. Estimamos su área como $3(0.9) \approx 3$ unidades cuadradas. Imagine que el anillo sólido, S, se abre y se aplana para formar una caja de alrededor de $2\pi r \approx 2(3)(6) = 36$ unidades de longitud. El volumen de una caja es el área de su sección transversal por su longitud. Así, estimamos el volumen de la caja como $3(36) = 108$ unidades cúbicas. Si lo calcula y obtiene 1000 unidades cúbicas, necesita verificar su trabajo. ■

$\boxed{\approx}$
En el ejemplo 3 hemos utilizado $\approx$ para decir "aproximadamente igual a". Utilice este símbolo cuando realice una aproximación. En un trabajo más formal no use este símbolo sin saber de qué tamaño podría ser el error.

Muchos problemas están marcados con este símbolo.

$\boxed{\approx}$ significa una estimación de la respuesta antes de resolver el problema; luego compruebe su respuesta contra esta estimación.

El proceso de *estimación* es simplemente el sentido común combinado con aproximaciones razonables de los números. Lo exhortamos a utilizarlo con frecuencia, particularmente en problemas. Antes de obtener una respuesta precisa, haga una estimación. Si su respuesta está cerca de su estimación, no hay garantía de que su respuesta sea correcta. Por otra parte, si su respuesta y su estimación son demasiado diferentes, debe verificar su trabajo. Probablemente hay un error en su respuesta o en su aproximación. Recuerde que $\pi \approx 3$, $\sqrt{2} \approx 1.4$, $2^{10} \approx 1000$, 1 pie $\approx$ 10 pulgadas, 1 milla $\approx$ 5000 pies, etcétera.

Un tema central en este texto es el sentido numérico. Por esto queremos decir la habilidad de trabajar un problema y decir si su solución es razonable para el problema planteado. Un estudiante con buen sentido numérico reconocerá y corregirá de forma inmediata una respuesta que, obviamente, es poco razonable. Para muchos de los ejemplos desarrollados en el texto, proporcionamos una estimación inicial de la solución, antes de proceder a determinar la solución exacta.

Un poco de lógica. En matemáticas, a los resultados importantes se les llama **teoremas**; en este texto usted encontrará muchos teoremas. Los más importantes aparecen con la etiqueta *Teorema* y por lo regular se les dan nombres (por ejemplo, el Teorema de Pitágoras). Otros aparecen en los conjuntos de problemas y se introducen con las palabras *demuestre* o *pruebe que*. En contraste con los axiomas o definiciones, que se admiten, los teoremas requieren ser demostrados.

Muchos teoremas son establecidos en la forma "si P entonces Q", o bien pueden enunciarse otra vez en esta forma. Con frecuencia, abreviamos el enunciado "si P entonces Q" por medio de $P \Rightarrow Q$, que también se lee "P implica Q". Llamamos a P la *hipótesis* y a Q la *conclusión* del teorema. Una prueba (demostración) consiste en demostrar que Q debe ser verdadera siempre que P sea verdadera.

Los estudiantes que inician (incluso, algunos maduros) pueden confundir $P \Rightarrow Q$ con su **recíproco,** $Q \Rightarrow P$. Estas dos proposiciones no son equivalentes. "Si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano" es una proposición verdadera, pero su recíproca "si Juan es americano, entonces es de Missouri" podría no ser cierta.

La **negación** de la proposición P se escribe $\sim P$. Por ejemplo, si P es la proposición "está lloviendo", entonces $\sim P$ es la proposición "no está lloviendo". La proposición $\sim Q \Rightarrow \sim P$ se denomina **contrapositiva** (o contrarrecíproca) de la proposición $P \Rightarrow Q$ y es equivalente a $P \Rightarrow Q$. Por "equivalente" queremos decir que $P \Rightarrow Q$ y $\sim Q \Rightarrow \sim P$ son, ambas, verdaderas o ambas falsas. Para nuestro ejemplo acerca de Juan, la contrapositiva de "si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano" es "si Juan no es americano, entonces Juan no es de Missouri".

Como consecuencia de que una proposición y su contrapositiva sean equivalentes, podemos demostrar un teorema de la forma "si P entonces Q" demostrando su contrapositiva "si $\sim Q$ entonces $\sim P$". Así, para demostrar $P \Rightarrow Q$, podemos suponer $\sim Q$ e intentar deducir $\sim P$. A continuación está un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 4 Demuestre que si n^2 es par, entonces n es par.

Prueba La contrapositiva de este enunciado es "si n no es par, entonces n^2 no es par", que es equivalente a "si n es impar, entonces n^2 es impar". Demostraremos la contrapositiva. Si n es impar, entonces existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Entonces,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Por lo tanto, n^2 es igual a uno más que el doble de un entero. De aquí que n^2 es impar. ■

La *ley del tercero excluido* dice: sucede R o $\sim R$, pero no ambos. Cualquier demostración que inicia suponiendo que la conclusión de un teorema es falsa y procede para demostrar que esta suposición conduce a una contradicción se denomina **demostración por contradicción**.

En ocasiones, necesitaremos otro tipo de demostración denominado **inducción matemática**. Nos alejaríamos demasiado en estos momentos para describir esto, pero hemos dado un estudio completo en el apéndice A.1.

Algunas veces, ambas proposiciones $P \Rightarrow Q$ (si P entonces Q) y $Q \Rightarrow P$ (si Q entonces P) son verdaderas. En este caso escribimos $P \Leftrightarrow Q$, que se lee "P si y sólo si Q". En el ejemplo 4 demostramos que "si n^2 es par, entonces n es par", pero el recíproco "si n es par, entonces n^2 es par" también es verdadero. Por lo tanto, diríamos "n es par si y sólo si n^2 es par".

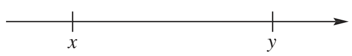
Demostración por contradicción

La demostración por contradicción también lleva el nombre de *reducción al absurdo*. He aquí lo que el gran matemático G. H. Hardy dijo acerca de ella:

> "La reducción al absurdo, que Euclides amaba tanto, es una de las armas más finas del matemático. Es muchísimo más fina que cualquier gambito en el ajedrez; un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o hasta de una pieza, pero un matemático ofrece el juego".

Orden en la recta real

Decir que $x < y$ significa que x está a la izquierda de y en la recta real.



Las propiedades de orden

1. **Tricotomía.** Si x y y son números, exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple:

   $x < y \quad \text{o} \quad x = y \quad \text{o} \quad x > y$
2. **Transitividad.** $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$.
3. **Suma.** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
4. **Multiplicación.** Cuando z es positiva $x < y \Leftrightarrow xz < yz$. Cuando z es negativa, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

Orden Los números reales diferentes de cero se separan, en forma adecuada, en dos conjuntos disjuntos, los números reales positivos y los números reales negativos. Este hecho nos permite introducir la relación de orden $<$ (se lee "es menor que") por medio de

$$\boxed{x < y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo}}$$

Acordamos que $x < y$ y $y > x$ significarán lo mismo. Así, $3 < 4$, $4 > 3$, $-3 < -2$ y $-2 > -3$.

La relación de orden $\leq$ (se lee "es menor o igual a") es prima hermana de $<$. Se define por medio de

$$\boxed{x \leq y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo o cero}}$$

Las propiedades de orden 2, 3 y 4, en el cuadro al margen, se cumplen al reemplazar los símbolos $<$ y $>$ por $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

Cuantificadores Muchas proposiciones matemáticas incluyen una variable x, y la validez de un enunciado depende del valor de x. Por ejemplo, la proposición "$\sqrt{x}$ es un número racional" depende del valor de x; es verdadero para algunos valores de x, tal como $x = 1, 4, 9$, $x = 1, 4, 9, \frac{4}{9}$, y $\frac{10{,}000}{49}$, y falso para otros valores de x, tales como $x = 2, 3, 77$ y π. Algunas proposiciones, tales como "$x^2 \geq 0$", son verdaderas para todo número real x, y otras proposiciones, tales como "x es un entero par mayor que 2 y x es un número primo", siempre son falsas. Denotaremos con *P(x)* un enunciado cuyo valor de verdad depende del valor de x.

Decimos "para toda x, *P(x)*" o "para cada x, *P(x)*", cuando la proposición $P(x)$ es verdadera para todo valor de x. Cuando al menos existe un valor de x para el cual es verdadera, decimos "existe una x tal que $P(x)$". Los dos importantes *cuantificadores* son "para todo" y "existe".

EJEMPLO 5 ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(a) Para toda x, $x^2 > 0$.
(b) Para toda x, $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$.
(c) Para cada x, existe una y tal que $y > x$.
(d) Existe una y tal que, para toda x, $y > x$.

SOLUCIÓN

(a) Falsa. Si elegimos $x = 0$, entonces no es verdadero que $x^2 > 0$.
(b) Verdadera. Si x es negativa, entonces x^2 será positiva.
(c) Verdadera. Esta proposición contiene dos cuantificadores, "para cada" y "existe". Para leer el enunciado de manera correcta, debemos aplicarlo en el orden correcto. La proposición inicia "para cada", de modo que si la proposición es verdadera, entonces lo que sigue debe ser verdadero para todo valor de x que seleccionemos. Si no está seguro de que el enunciado completo sea verdadero, intente con algunos valores de x y vea si la segunda parte del enunciado es verdadero o falso. Por ejemplo, podríamos elegir $x = 100$, dada esta elección; ¿existe una y que sea mayor a x? En otras palabras, ¿existe un número mayor que 100? Por supuesto que sí. El número 101 lo es. Ahora, seleccionemos otro valor para x, digamos $x = 1{,}000{,}000$. ¿Existe una y que sea mayor que este valor de x? Nuevamente, sí; en este caso el número 1,000,001 lo sería. Ahora, pregúntese: "Si tengo que x es cualquier número real, ¿podré encontrar una y que sea mayor a x?" La respuesta es sí. Basta con elegir a y como $x + 1$.
(d) Falsa. El enunciado dice que existe un número real que es mayor que todos los demás números reales. En otras palabras, existe un número real que es el mayor de todos. Esto es falso; aquí está una demostración por contradicción. Suponga que existe un número real mayor que todos, y. Sea $x = y + 1$. Entonces $x > y$, lo cual es contrario a la suposición de que y es el mayor número real. ■

La **negación** de la proposición P es la proposición "no P". (La proposición "no P" es verdadera siempre que P sea falsa). Considere la negación de la proposición "para toda x, $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces debe existir al menos un valor de x para el cual $P(x)$ es falsa; en otras palabras, existe una x tal que "no $P(x)$". Ahora considere la negación de la proposición "existe un x tal que $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces no existe una x para la cual $P(x)$ sea verdadera. Esto significa que $P(x)$ es falsa sin importar el valor de x. En otras palabras, "para toda x, no $P(x)$". En resumen,

La negación de "para toda x, $P(x)$" es "existe una x tal que no $P(x)$".

La negación de "existe una x tal que $P(x)$" es "para toda x, no $P(x)$".

Revisión de conceptos

1. Los números que pueden escribirse como la razón (cociente) de dos enteros se denominan _______.

2. Entre cualesquiera dos números reales, existe otro número real. Esto significa que los números reales son _______.

3. La contrapositiva (contrarrecíproca) de "si P entonces Q" es _______.

4. Los axiomas y las definiciones son tomados como ciertos, pero_______ requieren de una demostración.

Conjunto de problemas 0.1

En los problemas del 1 al 16 simplifique tanto como sea posible. Asegúrese de eliminar todos los paréntesis y reducir todas las fracciones.

1. $4 - 2(8 - 11) + 6$

2. $3[2 - 4(7 - 12)]$

3. $-4[5(-3 + 12 - 4) + 2(13 - 7)]$

4. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$

5. $\frac{5}{7} - \frac{1}{13}$

6. $\frac{3}{4 - 7} + \frac{3}{21} - \frac{1}{6}$

7. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\right]$

8. $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$

9. $\frac{14}{21}\left(\frac{2}{5 - \frac{1}{3}}\right)^2$

10. $\left(\frac{2}{7} - 5\right)/\left(1 - \frac{1}{7}\right)$

11. $\dfrac{\frac{11}{7} - \frac{12}{21}}{\frac{11}{7} + \frac{12}{21}}$

12. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$

13. $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

14. $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}}$

15. $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$

16. $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

En los problemas del 17 al 28 realice las operaciones indicadas y simplifique.

17. $(3x - 4)(x + 1)$

18. $(2x - 3)^2$

19. $(3x - 9)(2x + 1)$

20. $(4x - 11)(3x - 7)$

21. $(3t^2 - t + 1)^2$

22. $(2t + 3)^3$

23. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

24. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

25. $\dfrac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$

26. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

27. $\dfrac{12}{x^2 + 2x} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x + 2}$

28. $\dfrac{2}{6y - 2} + \dfrac{y}{9y^2 - 1}$

29. Determine el valor de cada una de las expresiones siguientes; si no está definida, indíquelo

(a) $0 \cdot 0$ (b) $\frac{0}{0}$ (c) $\frac{0}{17}$

(d) $\frac{3}{0}$ (e) 0^5 (f) 17^0

30. Demuestre que la división entre 0 no tiene significado como sigue: Suponga que $a \neq 0$. Si $a/0 = b$, entonces $a = 0 \cdot b = 0$, lo cual es una contradicción. Ahora determine una razón por la que 0/0 también carece de significado.

En los problemas del 31 al 36 cambie cada número racional a uno decimal mediante una división larga.

31. $\frac{1}{12}$

32. $\frac{2}{7}$

33. $\frac{3}{21}$

34. $\frac{5}{17}$

35. $\frac{11}{3}$

36. $\frac{11}{13}$

En los problemas del 37 al 42 cambie cada decimal periódico por una razón de dos enteros (véase el ejemplo 1).

37. 0.123123123...

38. 0.217171717...

39. 2.56565656...

40. 3.929292...

41. 0.199999...

42. 0.399999...

43. Como 0.199999... = 0.200000... y 0.399999... = 0.400000... (véanse los problemas 41 y 42), vemos que ciertos números racionales tienen diferentes expansiones decimales. ¿Cuáles son los números racionales que tienen esta propiedad?

44. Demuestre que cualquier número racional p/q, para el cual la factorización en primos de q consiste sólo en números 2 y números 5, tiene un desarrollo decimal finito.

45. Encuentre un número racional positivo y un número irracional positivo menores que 0.00001.

46. ¿Cuál es el menor entero positivo? ¿El menor racional positivo? ¿El menor número irracional positivo?

47. Encuentre un número racional entre 3.14159 y π. Note que $\pi = 3.141592....$

48. ¿Existe un número entre 0.9999... (los 9 se repiten) y 1? ¿Cómo concilia esto con el enunciado de que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe otro número real?

49. ¿El número 0.1234567891011121314... es racional o irracional? (Debe observar un patrón en la sucesión de dígitos dada).

50. Encuentre dos números irracionales cuya suma sea racional.

En los problemas del 51 al 56 determine la mejor aproximación decimal que su calculadora permita. Inicie haciendo una estimación mental.

51. $\left(\sqrt{3} + 1\right)^3$

52. $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^4$

53. $\sqrt[4]{1.123} - \sqrt[3]{1.09}$

54. $(3.1415)^{-1/2}$

55. $\sqrt{8.9\pi^2 + 1} - 3\pi$

56. $\sqrt[4]{(6\pi^2 - 2)\pi}$

57. Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe un número racional. (*Sugerencia:* si $a < b$, entonces $b - a > 0$, así que existe un número natural n tal que $1/n < b - a$. Considere el conjunto $\{k{:}k/n > b\}$ y utilice el hecho de que un conjunto de enteros que está acotado por abajo contiene un elemento menor). Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe una infinidad de números racionales.

58. Estime el volumen de su cabeza, en pulgadas cúbicas.

59. Estime la longitud del ecuador, en pies. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas.

60. ¿Alrededor de cuántas veces habrá latido su corazón en su vigésimo cumpleaños?

61. El árbol llamado General Sherman, que está en California, tiene una altura de casi 270 pies y promedia alrededor de 16 pies de diámetro. Estime el número de tablones de madera de 1 pulgada por 12 pulgadas por 12 pulgadas que podrían fabricarse con este árbol, suponiendo que no haya desperdicio e ignorando las ramas.

62. Suponga que cada año, el árbol General Sherman (véase el problema 61) produce un anillo de crecimiento de un grosor de 0.004 pies. Estime el aumento anual resultante en el volumen de su tronco.

63. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si hoy llueve, entonces trabajaré en casa.

(b) Si la candidata satisface todos los requisitos, entonces será contratada.

64. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si obtengo una A en el examen final, aprobaré el curso.

(b) Si termino mi artículo de investigación para el viernes, entonces tomaré un descanso la semana próxima.

65. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) (Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo.) Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

(b) Si el ángulo ABC es agudo, entonces su medida es mayor que 0° y menor que 90°.

66. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si la medida del ángulo ABC es 45°, entonces el ángulo ABC es agudo.

(b) Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

67. Considere los enunciados del problema 65 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

68. Considere los enunciados del problema 66 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

69. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo triángulo isósceles es equilátero.

(b) Existe un número real que no es entero.

(c) Todo número natural es menor o igual a su cuadrado.

70. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo número natural es racional.

(b) Existe un círculo cuya área es mayor que 9π.

(c) Todo número real es mayor que su cuadrado.

71. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos? Suponga que x y y son números reales.

(a) Para toda x, $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

(b) Para toda x, $x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$.

(c) Para toda x, $x^2 > x$.

(d) Para toda x, existe una y tal que $y > x^2$.

(e) Para todo número positivo y, existe otro número positivo x tal que $0 < x < y$.

72. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas? A menos que se diga lo contrario, suponga que x, y y ε son números reales.

(a) Para toda x, $x < x + 1$.

(b) Existe un número natural N, tal que todos los números primos son menores que N. (Un **número primo** es un número natural mayor que 1 cuyos únicos factores son 1 y él mismo.)

(c) Para cada $x > 0$, existe una y tal que $y > \frac{1}{x}$.

(d) Para toda x positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.

(e) Para cada ε positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

73. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a) Si n es impar, entonces n^2 es impar. (*Sugerencia:* si n es **impar**, entonces existe un entero k, tal que $n = 2k + 1$).

(b) Si n^2 es impar, entonces n es impar. (*Sugerencia:* demuestre la contrapositiva).

74. Demuestre que n es impar si y sólo si n^2 es impar. (Véase el problema 73).

75. De acuerdo con el **Teorema fundamental de la aritmética**, todo número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de primos, de una forma única, salvo por el orden de los factores. Por ejemplo, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Escriba cada uno de los siguientes números como un producto de primos.

(a) 243 (b) 124 (c) 5100

76. Utilice el Teorema fundamental de la aritmética (véase el problema 75) para demostrar que el cuadrado de cualquier número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de un conjunto único de primos, excepto por el orden de los factores, cada uno de los cuales aparece un número *par* de veces. Por ejemplo, $(45)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

77. Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción. Suponga que $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números naturales (necesariamente distintos de 1). Entonces $2 = p^2/q^2$, de modo que $2q^2 = p^2$. Ahora utilice el problema 76 para obtener una contradicción.

78. Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional (véase el problema 77).

79. Demuestre que la suma de dos números racionales es racional.

80. Demuestre que el producto de un número racional (distinto de 0) y un número irracional es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción.

81. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales?

(a) $-\sqrt{9}$ (b) 0.375

(c) $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$ (d) $(1 + \sqrt{3})^2$

82. Un número b se denomina **cota superior** para un conjunto S de números, si $x \le b$ para toda x en S. Por ejemplo, 5, 6.5 y 13 son cotas superiores para el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. El número 5 es la **mínima cota superior** para S (la más pequeña de las cotas superiores). De manera análoga, 1.6, 2 y 2.5 son cotas superiores para el conjunto infinito $T = \{1.4, 1.49, 1.499, 1.4999,...\}$ mientras que 1.5 es la mínima cota superior. Encuentre la mínima cota superior para cada uno de los siguientes conjuntos,

(a) $S = \{-10, -8, -6, -4, -2\}$

(b) $S = \{-2, -2.1, -2.11, -2.111, -2.1111, \ldots\}$

(c) $S = \{2.4, 2.44, 2.444, 2.4444, \ldots\}$

(d) $S = \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

(e) $S = \{x | x = (-1)^n + 1/n$, n es un entero positivo$\}$; esto es, S es el conjunto de todos los números x que tienen la forma $x = (-1)^n + 1/n$, donde n es un entero positivo.

(f) $S = \{x : x^2 < 2$, x es un número racional$\}$.

EXPL **83.** El axioma de completez para los números reales dice: *todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior que es un número real.*

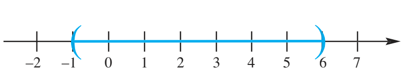
(a) Demuestre que la proposición en cursivas es falsa si las palabras *reales* y *real* se reemplazan por *racionales* y *racional*, respectivamente.

(b) ¿La proposición en cursivas será verdadera o falsa si las palabras *reales* y *real* fuesen reemplazadas por *naturales* y *natural*, respectivamente?

Respuestas a la revisión de conceptos **1.** números racionales **2.** densos **3.** "Si no Q entonces no P". **4.** teoremas

0.2 Desigualdades y valor absoluto

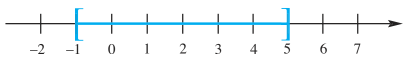
La resolución de ecuaciones (por ejemplo, $3x - 17 = 6$ o $x^2 - x - 6 = 0$) es una de las tareas tradicionales de las matemáticas; en este curso será importante y suponemos que usted recordará cómo hacerlo. Pero, casi de igual importancia en cálculo es la noción de resolver una desigualdad (por ejemplo, $3x - 17 < 6$ o $x^2 - x - 6 \ge 0$). **Resolver** una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que hace que la desigualdad sea verdadera. En contraste con una ecuación, cuyo conjunto solución por lo regular consiste en un número o quizá en un conjunto finito de números, el conjunto solución de una desigualdad por lo regular es un intervalo completo de números o, en algunos casos, la unión de tales intervalos.



$(-1, 6) = \{x : -1 < x < 6\}$

Figura 1

Intervalos Varias clases de intervalos surgirán en nuestro trabajo, para los cuales introducimos una terminología y notación especial. La desigualdad $a < x < b$, que en realidad son dos desigualdades, $a < x$ y $x < b$, describe un **intervalo abierto** que consiste en todos los números entre a y b, pero que no incluye los puntos extremos a y b. Lo denotamos por medio del símbolo (a, b) (véase la figura 1). En contraste, la desigualdad $a \le x \le b$ describe el correspondiente **intervalo cerrado**, que incluye los extremos a y b.



$[-1, 5] = \{x : -1 \leq x \leq 5\}$

Figura 2

Se denota como $[a, b]$ (véase la figura 2). La tabla indica la amplia variedad de posibilidades e introduce nuestra notación.

Notación de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

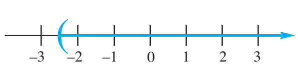
Resolución de desigualdades Como con las ecuaciones, el procedimiento para resolver una desigualdad consiste en transformar la desigualdad un paso a la vez hasta que el conjunto solución sea obvio. Podemos realizar ciertas operaciones en ambos lados de una desigualdad sin cambiar su conjunto solución. En particular:

1. Podemos sumar el mismo número a ambos lados de una desigualdad.
2. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número positivo.
3. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número negativo, pero entonces debemos invertir el sentido del signo de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $2x - 7 < 4x - 2$ y muestre la gráfica de su conjunto solución.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2x - 7 &< 4x - 2 \\ 2x &< 4x + 5 \qquad \text{(sume 7)} \\ -2x &< 5 \qquad \text{(sume } -4x\text{)} \\ x &> -\tfrac{5}{2} \qquad \text{(multiplique por } -\tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$



$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\frac{5}{2}\right\}$

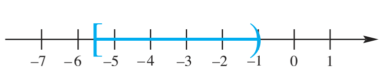
Figura 3

La gráfica aparece en la figura 3. ■

EJEMPLO 2 Resuelva $-5 \leq 2x + 6 < 4$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} -5 \leq\ & 2x + 6 < 4 \\ -11 \leq\ & 2x < -2 \qquad \text{(sume } -6\text{)} \\ -\tfrac{11}{2} \leq\ & x < -1 \qquad \text{(multiplique por } \tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$



$\left[-\frac{11}{2}, -1\right) = \left\{x : -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$

Figura 4

La figura 4 muestra la gráfica correspondiente. ■

Antes de abordar una desigualdad cuadrática hacemos notar que un factor lineal de la forma $x - a$ es positivo para $x > a$ y negativo para $x < a$. Se deduce que un producto $(x - a)(x - b)$ puede cambiar de positivo a negativo, y viceversa, sólo en a o b. Estos puntos, en donde el factor es cero, se denominan **puntos de separación**. Estos puntos son la clave para determinar los conjuntos solución de desigualdades cuadráticas y otras desigualdades más complicadas.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad cuadrática $x^2 - x < 6$.

SOLUCIÓN Como con las ecuaciones cuadráticas, pasamos todos los términos distintos de cero a un lado y factorizamos.

$$x^2 - x < 6$$
$$x^2 - x - 6 < 0 \qquad \text{(sume } -6\text{)}$$
$$(x - 3)(x + 2) < 0 \qquad \text{(factorice)}$$

Punto de prueba	**Signo de** $(x-3)$	$(x+2)$	**Signo de** $(x-3)(x+2)$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$
5	$+$	$+$	$+$

Vemos que –2 y 3 son los puntos de separación; dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$. En cada uno de estos intervalos $(x - 3)(x + 2)$ conserva el signo; esto es, ahí siempre es positivo o siempre negativo. Para determinar este signo en cada intervalo, utilizamos los **puntos de prueba** -3, 0 y 5 (cualesquiera otros puntos en estos intervalos sirven). Nuestros resultados se muestran en la tabla al margen.

La información que hemos obtenido se resume en la parte superior de la figura 5. Concluimos que el conjunto solución para $(x - 3)(x + 2) < 0$ es el intervalo $(-2, 3)$. Su gráfica se muestra en la parte inferior de la figura 5. ■

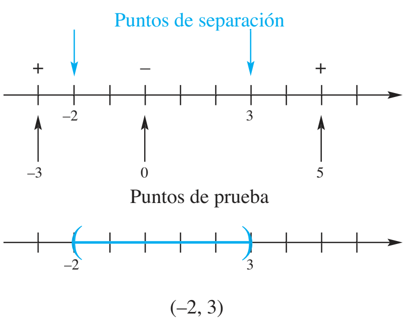


Figura 5

EJEMPLO 4 Resuelva $3x^2 - x - 2 > 0$.

SOLUCIÓN Ya que

$$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1) = 3(x - 1)\left(x + \tfrac{2}{3}\right)$$

los puntos de separación son $-\frac{2}{3}$ y 1. Estos puntos, junto con los puntos de prueba -2, 0 y 2, establecen la información que se muestra en la parte superior de la figura 6. Concluimos que el conjunto solución de la desigualdad consiste en los puntos que se encuentran en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ o en $(1, \infty)$. En el lenguaje de conjuntos es la **unión** (simbolizada con $\cup$) de estos dos intervalos; esto es, es$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$. ■

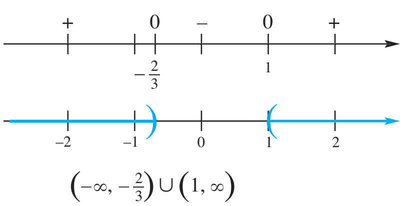


Figura 6

EJEMPLO 5 Resuelva $\dfrac{x - 1}{x + 2} \geq 0$.

SOLUCIÓN Nuestra inclinación a multiplicar ambos lados por $x + 2$ conduce a un dilema inmediato, dado que $x + 2$ puede ser positivo o negativo. ¿Debemos invertir el signo de la desigualdad o dejarlo como está? En lugar de tratar de desenredar este problema (que requeriría dividirlo en dos casos), observamos que el cociente $(x - 1)/(x + 2)$ puede cambiar de signo en los puntos de separación del numerador y del denominador, esto es, en 1 y -2. Los puntos de prueba -3, 0 y 2 proporcionan la información de la parte superior de la figura 7. El símbolo *n* indica que el cociente *no* está definido en -2. Concluimos que el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. Observe que -2 no pertenece al conjunto solución ya que ahí el cociente está indefinido. Por otra parte, 1 está incluido ya que la desigualdad se cumple cuando $x = 1$. ■

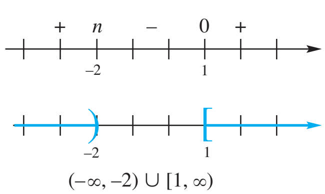


Figura 7

EJEMPLO 6 Resuelva $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \leq 0$.

SOLUCIÓN Los puntos de separación son -1, 1 y 3, los cuales dividen la recta real en cuatro intervalos, como se muestra en la figura 8. Después de probar todos estos intervalos, concluimos que el conjunto solución es $[-1, 1] \cup [1, 3]$ que es el intervalo $[-1, 3]$. ■

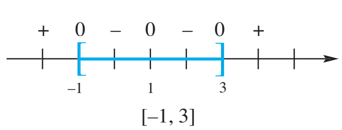


Figura 8

EJEMPLO 7 Resuelva $2.9 < \dfrac{1}{x} < 3.1$.

SOLUCIÓN Es tentador multiplicar por x, pero esto nuevamente lleva al dilema de que x puede ser positiva o negativa. Sin embargo, en este caso, $\frac{1}{x}$ debe estar entre 2.9 y 3.1, lo cual garantiza que x es positivo. Por lo tanto, es válido multiplicar por x y no invertir las desigualdades. Así,

$$2.9x < 1 < 3.1x$$

En este punto debemos dividir esta desigualdad compuesta en dos desigualdades, que resolvemos de manera separada

$$2.9x < 1 \quad \text{y} \quad 1 < 3.1x$$

$$x < \frac{1}{2.9} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3.1} < x$$

Cualquier valor de x que satisfaga la desigualdad original debe satisfacer ambas desigualdades. Por lo tanto, el conjunto solución consiste en aquellos valores de x que satisfacen

$$\frac{1}{3.1} < x < \frac{1}{2.9}$$

Esta desigualdad puede escribirse como

$$\frac{10}{31} < x < \frac{10}{29}$$

El intervalo $\left(\frac{10}{31}, \frac{10}{29}\right)$ se muestra en la figura 9. ■

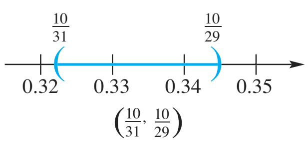


Figura 9

Valores absolutos El concepto de valor absoluto es extremadamente útil en cálculo, y el lector debe adquirir habilidad para trabajar con él. El **valor absoluto** de un número real x, denotado por $|x|$ está definido como

$$\boxed{\begin{aligned} |x| &= x \qquad \text{si } x \geq 0 \\ |x| &= -x \qquad \text{si } x < 0 \end{aligned}}$$

Por ejemplo, $|6| = 6$, $|0| = 0$ y $|-5| = -(-5) = 5$. Esta definición dada en dos partes merece un estudio cuidadoso. Observe que no dice que $|-x| = x$ (para ver por qué, pruebe con -5). Es cierto que $|x|$ siempre es no negativo; también es verdadero que $|-x| = |x|$.

Una de las mejores formas de pensar en el valor absoluto de un número es como una distancia no dirigida. En particular, $|x|$ es la distancia entre x y el origen. De manera análoga, $|x - a|$ es la distancia entre x y a (véase la figura 10).

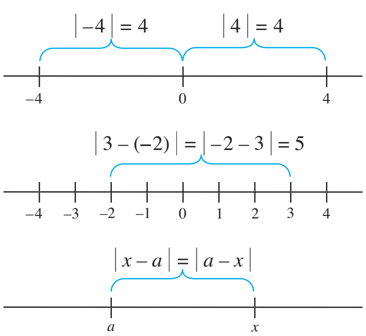


Figura 10

Propiedades El valor absoluto se comporta de manera adecuada con la multiplicación y la división, pero no así con la suma y la resta.

Propiedades del valor absoluto

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad del triángulo)
4. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Desigualdades que incluyen valores absolutos Si $|x| < 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser menor que 3. En otras palabras, x debe ser simultáneamente menor que 3 *y* mayor que -3; esto es, $-3 < x < 3$. Por otra parte, si $|x| > 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser mayor que 3. Esto puede suceder cuando $x > 3$ *o* $x < -3$ (véase la figura 11). Éstos son casos especiales de las siguientes proposiciones generales que se cumplen cuando $a > 0$.

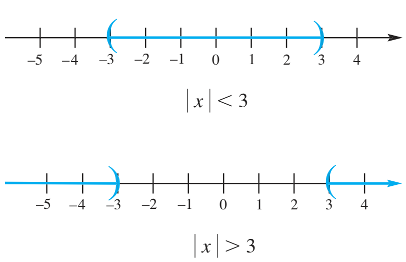


Figura 11

(1) $$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad \text{o} \quad x > a$$

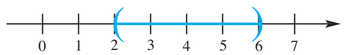
Podemos utilizar estos hechos para resolver desigualdades que impliquen valores absolutos, ya que proporcionan una manera de quitar los signos de valor absoluto.

EJEMPLO 8 Resuelva la desigualdad $|x-4|<2$ y muestre el conjunto solución en la recta real. Interprete el valor absoluto como una distancia.

SOLUCIÓN Con base en las proposiciones en (1), sustituyendo x por $x-4$, vemos que

$$|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2$$

Cuando sumamos 4 a los tres miembros de esta última desigualdad, obtenemos $2<x<6$. La gráfica se muestra en la figura 12.



$|x-4|<2$

Figura 12

En términos de distancia, el símbolo $|x-4|$ representa la distancia entre x y 4. Por lo tanto, la desigualdad dice que la distancia entre x y 4 debe ser menor a 2. Los números x con esta propiedad son los números entre 2 y 6; esto es, $2<x<6$. ■

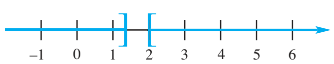
Las proposiciones (1) dadas antes del ejemplo 8 son válidas cuando $<$ y $>$ son reemplazadas por $\le$ y $\ge$, respectivamente. Necesitamos la segunda proposición en esta forma para nuestro ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Resuelva la desigualdad $|3x-5|\ge 1$ y muestre su conjunto solución en la recta real.

SOLUCIÓN La desigualdad dada puede escribirse de manera sucesiva como

$$\begin{array}{rclcrcl} 3x-5 &\le& -1 & \text{o} & 3x-5 &\ge& 1 \\ 3x &\le& 4 & \text{o} & 3x &\ge& 6 \\ x &\le& \frac{4}{3} & \text{o} & x &\ge& 2 \end{array}$$

El conjunto solución es la unión de dos intervalos, $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$, y se muestra en la figura 13. ■



$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$

Figura 13

En el capítulo 1 necesitaremos hacer la clase de manipulaciones que se ilustran en los dos ejemplos siguientes. Delta (δ) y épsilon (ε) son la cuarta y quinta letras, respectivamente, del alfabeto griego y se utilizan de manera tradicional para representar números positivos pequeños.

EJEMPLO 10 Sea ε (épsilon) un número positivo. Demuestre que

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10|<\varepsilon$$

En términos de distancia, esto dice que la distancia entre x y 2 es menor que $\varepsilon/5$, si y sólo si la distancia entre $5x$ y 10 es menor que ε.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rcrcll} |x-2|<\frac{\varepsilon}{5} & \Leftrightarrow & 5|x-2| &<& \varepsilon & \text{(multiplique por 5)} \\ & \Leftrightarrow & |5|\,|(x-2)| &<& \varepsilon & (|5|=5) \\ & \Leftrightarrow & |5(x-2)| &<& \varepsilon & (|a||b|=|ab|) \\ & \Leftrightarrow & |5x-10| &<& \varepsilon & \end{array}$$

■

EJEMPLO 11 Sea ε un número positivo. Encuentre un número positivo δ (delta) tal que

$$|x-3|<\delta \Rightarrow |6x-18|<\varepsilon$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rcll} |6x-18|<\varepsilon & \Leftrightarrow & |6(x-3)|<\varepsilon & \\ & \Leftrightarrow & 6|x-3|<\varepsilon & (|ab|=|a||b|) \\ & \Leftrightarrow & |x-3|<\frac{\varepsilon}{6} & \left(\text{multiplique por } \frac{1}{6}\right) \end{array}$$

Determinación de delta

Observe dos hechos acerca de nuestra solución para el ejemplo 11.

1. El número que encontramos para δ debe depender de ε. nuestra elección es $\delta=\varepsilon/6$.
2. Cualquier número positivo δ más pequeño que $\varepsilon/6$ es aceptable. Por ejemplo $\delta=\varepsilon/7$ o $\delta=\varepsilon/(2\pi)$ son otras opciones correctas.

Por lo tanto, elegimos $\delta = \varepsilon/6$. Siguiendo las implicaciones de regreso, vemos que

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon \qquad ■$$

A continuación se presenta un problema práctico que utiliza el mismo tipo de razonamiento.

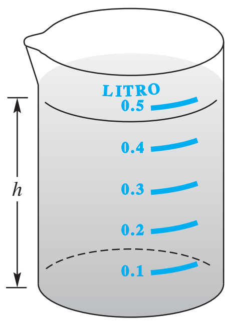


Figura 14

EJEMPLO 12 Un vaso de precipitados de $\frac{1}{2}$ litro (500 centímetros cúbicos) tiene un radio interno de 4 centímetros. ¿Con qué exactitud debemos medir la altura h del agua en el vaso para asegurar que tenemos $\frac{1}{2}$ litro de agua con un error de menos de 1%, esto es, un error de menos de 5 centímetros cúbicos? Véase la figura 14.

SOLUCIÓN El volumen V de agua en el vaso está dado por la fórmula $V = 16\pi h$. Queremos que $|V - 500| < 5$ o, de manera equivalente, $|16\pi h - 500| < 5$. Ahora

$$\begin{aligned} |16\pi h - 500| < 5 &\Leftrightarrow \left|16\pi\left(h - \frac{500}{16\pi}\right)\right| < 5 \\ &\Leftrightarrow \quad 16\pi\left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < \frac{5}{16\pi} \\ &\Leftrightarrow \quad |h - 9.947| < 0.09947 \approx 0.1 \end{aligned}$$

Así, debemos medir la altura con una precisión de alrededor de 1 milímetro. ■

Notación para las raíces cuadradas
Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Por ejemplo, las dos raíces cuadradas de 9 son 3 y −3. En ocasiones, representamos estos dos números como ±3. Para $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$, que se denomina **raíz cuadrada principal** de a, denota la raíz cuadrada no negativa de a. Por lo tanto, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{121} = 11$. Es incorrecto escribir $\sqrt{16} = \pm 4$ ya que $\sqrt{16}$ significa la raíz cuadrada no negativa de 16; esto es, 4. El número 7 tiene dos raíces cuadradas, que se escriben como $\pm\sqrt{7}$, pero $\sqrt{7}$ representa un solo número real. Recuerde esto: $$a^2 = 16$$ tiene dos soluciones, $a = -4$ y $a = 4$, pero $$\sqrt{16} = 4$$

Fórmula cuadrática La mayoría de los estudiantes recordarán la **Fórmula cuadrática**. Las soluciones a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El número $d = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. Esta ecuación tiene dos soluciones reales si $d > 0$, una solución real si $d = 0$ y soluciones no reales si $d < 0$. Con la fórmula cuadrática, fácilmente podemos resolver desigualdades cuadráticas, incluso, si no se pueden factorizar por inspección.

EJEMPLO 13 Resuelva $x^2 - 2x - 4 \leq 0$.

SOLUCIÓN Las dos soluciones de $x^2 - 2x - 4 = 0$ son

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 - \sqrt{5} \approx -1.24$$

y

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 + \sqrt{5} \approx 3.24$$

Así,

$$x^2 - 2x - 4 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$$

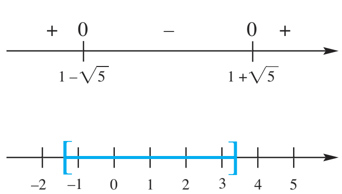


Figura 15

Los puntos de separación $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$ dividen a la recta real en tres intervalos (véase la figura 15). Cuando los comprobamos con los puntos de prueba −2, 0 y 4, concluimos que el conjunto solución para $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ es $\left[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right]$. ■

Cuadrados Regresando a los cuadrados, notemos que

$$\boxed{|x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad |x| = \sqrt{x^2}}$$

> **Notación para raíces**
>
> Si n es número par y $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ denota la raíz n-ésima no negativa de a. Cuando n es impar, sólo existe una raíz n-ésima real de a, denotada por el símbolo $\sqrt[n]{a}$. Por lo tanto, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, y $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Esto se deduce de la propiedad $|a||b| = |ab|$.

¿La operación de elevar al cuadrado preserva las desigualdades? En general, la respuesta es no. Por ejemplo, $-3 < 2$, pero $(-3)^2 > 2^2$. Por otra parte, $2 < 3$ y $2^2 < 3^2$. Si tratamos con números no negativos, entonces $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Una variante útil de esto (véase el problema 63) es

$$\boxed{|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2}$$

EJEMPLO 14 Resuelva la desigualdad $|3x + 1| < 2|x - 6|$.

SOLUCIÓN Esta desigualdad es más difícil de resolver que nuestros ejemplos anteriores, debido a que hay dos signos de valor absoluto. Podemos eliminar ambos al usar el resultado del último recuadro.

$$\begin{aligned}
|3x + 1| < 2|x - 6| &\Leftrightarrow |3x + 1| < |2x - 12| \\
&\Leftrightarrow (3x + 1)^2 < (2x - 12)^2 \\
&\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144 \\
&\Leftrightarrow 5x^2 + 54x - 143 < 0 \\
&\Leftrightarrow (x + 13)(5x - 11) < 0
\end{aligned}$$

Los puntos de separación para esta desigualdad cuadrática son -13 y $\frac{11}{5}$; estos puntos dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -13)$, $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$, y $\left(\frac{11}{5}, \infty\right)$. Cuando utilizamos los puntos de prueba -14, 0 y 3, descubrimos que sólo los puntos en $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$ satisfacen la desigualdad. ■

Revisión de conceptos

1. El conjunto $\{x: -1 \leq x < 5\}$ se escribe en notación de intervalos como _______ y el conjunto $\{x: x \leq -2\}$ se escribe como _______.

2. Si $a/b < 0$, entonces $a < 0$ y _______ o bien $a > 0$ y _______.

3. ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes siempre son verdaderas?

(a) $|-x| = x$ (b) $|x|^2 = x^2$

(c) $|xy| = |x||y|$ (d) $\sqrt{x^2} = x$

4. La desigualdad $|x - 2| \leq 3$ es equivalente a _______ $\leq x \leq$ _______.

Conjunto de problemas 0.2

1. Muestre cada uno de los intervalos siguientes en la recta real.

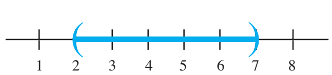
(a) $[-1, 1]$ (b) $(-4, 1]$

(c) $(-4, 1)$ (d) $[1, 4]$

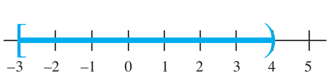
(e) $[-1, \infty)$ (f) $(-\infty, 0]$

2. Utilice la notación del problema 1 para describir los intervalos siguientes.

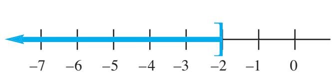
(a)



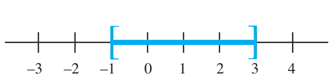
(b)



(c)



(d)



En cada problema del 3 al 26 exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

3. $x - 7 < 2x - 5$

4. $3x - 5 < 4x - 6$

5. $7x - 2 \leq 9x + 3$

6. $5x - 3 > 6x - 4$

7. $-4 < 3x + 2 < 5$

8. $-3 < 4x - 9 < 11$

9. $-3 < 1 - 6x \leq 4$

10. $4 < 5 - 3x < 7$

11. $x^2 + 2x - 12 < 0$

12. $x^2 - 5x - 6 > 0$

13. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

14. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

15. $\dfrac{x + 4}{x - 3} \leq 0$

16. $\dfrac{3x - 2}{x - 1} \geq 0$

17. $\dfrac{2}{x} < 5$

18. $\dfrac{7}{4x} \leq 7$

19. $\dfrac{1}{3x - 2} \leq 4$

20. $\dfrac{3}{x + 5} > 2$

21. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$

22. $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) < 0$

23. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$

24. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) > 0$

25. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$ **26.** $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

27. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-3 < -7$ (b) $-1 > -17$ (c) $-3 < -\frac{22}{7}$

28. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-5 > -\sqrt{26}$ (b) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$ (c) $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

29. Suponga que $a > 0, b > 0$. Demuestre cada proposición. *Sugerencia:* cada parte requiere de dos demostraciones: una para $\Rightarrow$ y otra para $\Leftarrow$.

(a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (b) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

30. Si $a \leq b$, ¿cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas?

(a) $a^2 \leq ab$ (b) $a - 3 \leq b - 3$

(c) $a^3 \leq a^2b$ (d) $-a \leq -b$

31. Encuentre todos los valores de x que satisfagan, de manera simultánea, ambas desigualdades.

(a) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < 3$

(b) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 > -4$

(c) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < -4$

32. Encuentre todos los valores de x que satisfacen al menos una de las dos desigualdades.

(a) $2x - 7 > 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(b) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(c) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 > 3$

33. Resuelva para x, exprese su respuesta en notación de intervalos.

(a) $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$

(b) $x^4 - 2x^2 \geq 8$

(c) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$

34. Resuelva cada desigualdad. Exprese su solución en notación de intervalos.

(a) $1.99 < \frac{1}{x} < 2.01$ (b) $2.99 < \frac{1}{x + 2} < 3.01$

En los problemas del 35 al 44 determine los conjuntos solución de las desigualdades dadas.

35. $|x - 2| \geq 5$ **36.** $|x + 2| < 1$

37. $|4x + 5| \leq 10$ **38.** $|2x - 1| > 2$

39. $\left|\frac{2x}{7} - 5\right| \geq 7$ **40.** $\left|\frac{x}{4} + 1\right| < 1$

41. $|5x - 6| > 1$ **42.** $|2x - 7| > 3$

43. $\left|\frac{1}{x} - 3\right| > 6$ **44.** $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

En los problemas del 45 al 48 resuelva la desigualdad cuadrática por medio de la fórmula cuadrática.

45. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ **46.** $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

47. $3x^2 + 17x - 6 > 0$ **48.** $14x^2 + 11x - 15 \leq 0$

En los problemas 49 al 52 muestre que la implicación indicada es verdadera.

49. $|x - 3| < 0.5 \Rightarrow |5x - 15| < 2.5$

50. $|x + 2| < 0.3 \Rightarrow |4x + 8| < 1.2$

51. $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 12| < \varepsilon$

52. $|x + 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 8| < \varepsilon$

En los problemas del 53 al 56 determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación dada sea verdadera.

53. $|x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon$

54. $|x - 2| < \delta \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon$

55. $|x + 6| < \delta \Rightarrow |6x + 36| < \varepsilon$

56. $|x + 5| < \delta \Rightarrow |5x + 25| < \varepsilon$

57. En un torno, usted desea fabricar un disco (cilindro circular recto delgado) con circunferencia de 10 pulgadas. Esto se realiza midiendo de manera continua el diámetro conforme se hace el disco más pequeño. ¿Qué tan exacto debe medir el diámetro si puede tolerar un error de, a lo sumo, 0.02 pulgadas en la circunferencia?

58. Las temperaturas Fahrenheit y las temperaturas Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Un experimento requiere mantener una solución a 50°C con un error de 3% (o 1.5°), a lo sumo. Usted sólo tiene un termómetro Fahrenheit. ¿Qué error se le permite en el experimento?

En los problemas del 59 al 62 resuelva las desigualdades.

59. $|x - 1| < 2|x - 3|$ **60.** $|2x - 1| \geq |x + 1|$

61. $2|2x - 3| < |x + 10|$ **62.** $|3x - 1| < 2|x + 6|$

63. Demuestre que $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$ dando una razón para cada uno de los siguientes pasos.

$$|x| < |y| \Rightarrow |x||x| \leq |x||y| \quad \text{y} \quad |x||y| < |y||y|$$
$$\Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow x^2 < y^2$$

Recíprocamente,

$$x^2 < y^2 \Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow |x|^2 - |y|^2 < 0$$
$$\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) < 0$$
$$\Rightarrow |x| - |y| < 0$$
$$\Rightarrow |x| < |y|$$

64. Utilice el resultado del problema 63 para demostrar que

$$0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

65. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas.

(a) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (b) $|a - b| \geq |a| - |b|$

(c) $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

66. Utilice la desigualdad del triángulo y el hecho de que $0 < |a| < |b| \Rightarrow 1/|b| < 1/|a|$, para establecer la siguiente cadena de desigualdades.

$$\left|\frac{1}{x^2 + 3} - \frac{1}{|x| + 2}\right| \leq \frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{|x| + 2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

67. Demuestre que (véase el problema 66)

$$\left|\frac{x - 2}{x^2 + 9}\right| \leq \frac{|x| + 2}{9}$$

68. Demuestre que

$$|x| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1}\right| \leq 15$$

69. Demuestre que

$$|x| \le 1 \Rightarrow \left|x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}\right| < 2$$

70. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $x < x^2$ para $x < 0$ o $x > 1$

(b) $x^2 < x$ para $0 < x < 1$

71. Demuestre que $a \neq 0 \Rightarrow a^2 + 1/a^2 \ge 2$. *Sugerencia:* considere $(a - 1/a)^2$.

72. El número $\frac{1}{2}(a + b)$ se le llama promedio, o **media aritmética**, de a y b. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números; es decir, pruebe que

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

73. El número $\sqrt{ab}$ se denomina **media geométrica** de los dos números positivos a y b. Pruebe que

$$0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$$

74. Para dos números positivos a y b, pruebe que

$$\sqrt{ab} \le \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Ésta es la versión más sencilla de una famosa desigualdad llamada **desigualdad de la media geométrica – media aritmética**.

75. Demuestre que, entre todos los rectángulos con un perímetro dado p, el cuadrado tiene la mayor área. *Sugerencia*: si a y b denotan las longitudes de los lados adyacentes de un rectángulo de perímetro p, entonces el área es ab, y para el cuadrado el área es $a^2 = [(a + b)/2]^2$. Ahora vea el problema 74.

76. Resuelva $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} \le 0$.

77. La fórmula $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ proporciona la resistencia total R en un circuito eléctrico debida a tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, conectadas en paralelo. Si $10 \le R_1 \le 20$, $20 \le R_2 \le 30$ y $30 \le R_3 \le 40$, determine el rango de valores de R.

78. El radio de una esfera mide aproximadamente 10 pulgadas. Determine una tolerancia δ en la medición que asegure un error menor que 0.01 pulgadas cuadradas en el valor calculado del área de la superficie de la esfera.

Respuestas a la revisión de conceptos. **1.** $[-1, 5)$; $(-\infty, -2]$ **2.** $b > 0$; $b < 0$ **3.** (b) and (c) **4.** $-1 \le x \le 5$

0.3 El sistema de coordenadas rectangulares

En el plano, produzca dos copias de la recta real, una horizontal y la otra vertical, de modo que se intersecten en los puntos cero de las dos rectas. Las dos rectas se denominan **ejes coordenados**, su intersección se etiqueta con O y se denomina **origen**. Por convención, la recta horizontal se llama **eje *x*** y la recta vertical se llama **eje *y***. La mitad positiva del eje x es hacia la derecha, la mitad positiva del eje y es hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que llevan las marcas I, II, III y IV, como se muestra en la figura 1.

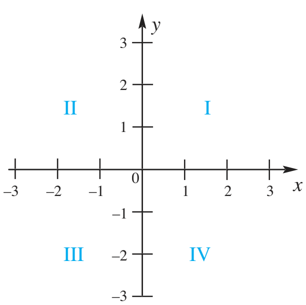


Figura 1

Ahora, cada punto P en el plano puede asignarse a una pareja de números, llamados **coordenadas cartesianas**. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por P intersectan los ejes x y y en a y b, respectivamente, entonces P tiene coordenadas (a, b) (véase la figura 2). Llamamos a (a, b) un **par ordenado** de números debido a que es importante saber cuál número está primero. El primer número, a, es la **coordenada *x*** (o abscisa); el segundo número, b, es la **coordenada *y*** (u ordenada).

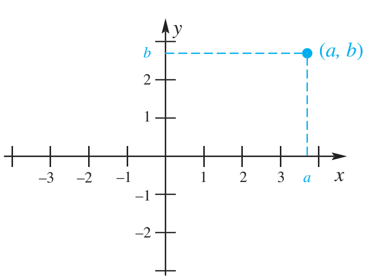


Figura 2

La fórmula de la distancia

Con coordenadas a la mano, podemos introducir una fórmula sencilla para la distancia entre cualesquiera dos puntos en el plano. Tiene como base el **Teorema de Pitágoras**, el cual dice que si a y b son las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de su hipotenusa (véase la figura 3), entonces

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Recíprocamente, la relación entre los tres lados de un triángulo se cumple sólo para un triángulo rectángulo.

Ahora considérese cualesquiera dos puntos P y Q, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Junto con R, el punto de coordenadas (x_2, y_1), P y Q son los vértices de un triángulo rectángulo (véase la figura 4). Las longitudes de PR y RQ son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$, respectivamente. Cuando aplicamos el Teorema de Pitágoras y tomamos la raíz cuadrada principal de ambos lados, obtenemos la expresión siguiente para la **fórmula de la distancia**

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

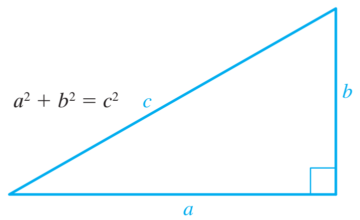


Figura 3

EJEMPLO 1 Encuentre la distancia entre

(a) $P(-2, 3)$ y $Q(4, -1)$ (b) $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ y $Q(\pi, \pi)$

SOLUCIÓN

(a) $d(P, Q) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21$

(b) $d(P, Q) = \sqrt{\left(\pi - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\pi - \sqrt{3}\right)^2} \approx \sqrt{4.971} \approx 2.23$ ■

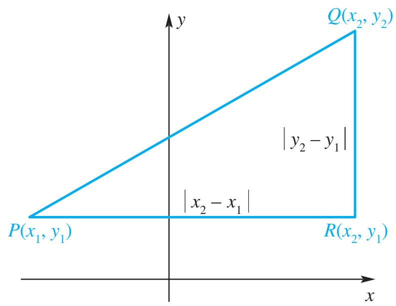


Figura 4

La fórmula es válida incluso si los dos puntos pertenecen a la misma recta horizontal o a la misma recta vertical. Así, la distancia entre $P(-2, 2)$ y $Q(6, 2)$ es

$$\sqrt{(6-(-2))^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{64} = 8$$

La ecuación de una circunferencia Es un paso pequeño ir de la fórmula de la distancia a la ecuación de una circunferencia. Una **circunferencia** es el conjunto de puntos que están a una distancia fija (el *radio*) de un punto fijo (el *centro*). Por ejemplo, considere la circunferencia de radio 3 con centro en $(-1, 2)$ (véase la figura 5). Sea (x, y) un punto cualquiera de esta circunferencia. Por medio de la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = 3$$

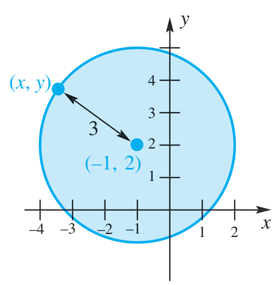


Figura 5

Cuando elevamos al cuadrado ambos lados obtenemos

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

que llamamos la ecuación de esta circunferencia.

En forma más general, la circunferencia de radio r y centro (h, k) tiene la ecuación

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2} \qquad (1)$$

A esto le llamamos **ecuación estándar de una circunferencia.**

EJEMPLO 2 Determine la ecuación estándar de una circunferencia de radio 5 y centro en $(1, -5)$. También, encuentre las ordenadas de los dos puntos en esta circunferencia con abscisa 2.

SOLUCIÓN La ecuación buscada es

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

Para realizar la segunda tarea, sustituimos $x = 2$ en la ecuación y despejamos la y.

$$\begin{aligned} (2 - 1)^2 + (y + 5)^2 &= 25 \\ (y + 5)^2 &= 24 \\ y + 5 &= \pm\sqrt{24} \\ y &= -5 \pm \sqrt{24} = -5 \pm 2\sqrt{6} \end{aligned}$$ ■

Si desarrollamos los dos cuadrados en el recuadro (1) y reducimos las constantes, entonces la ecuación adquiere la forma

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

Esto sugiere la pregunta de si toda ecuación de la última forma es la ecuación de una circunferencia. La respuesta es sí, con algunas excepciones obvias.

Circunferencia ↔ Ecuación

Decir que

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

es la ecuación de la circunferencia de radio 3 con centro $(-1, 2)$ significa dos cosas:

1. Si un punto está en esta circunferencia, entonces sus coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación.
2. Si x y y son números que satisfacen la ecuación, entonces son las coordenadas de un punto en la circunferencia.

EJEMPLO 3 Demuestre que la ecuación

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

representa una circunferencia, y determine su centro y su radio.

SOLUCIÓN Necesitamos *completar el cuadrado*, un importante proceso en muchos contextos. Para completar el cuadrado de $x^2 \pm bx$, sumamos $(b/2)^2$. Así, sumamos $(-2/2)^2 = 1$ a $x^2 - 2x$ y $(6/2)^2 = 9$ a $y^2 + 6y$, y por supuesto debemos añadir los mismos números al lado derecho de la ecuación, para obtener

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = -6 + 1 + 9$$
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

La última ecuación está en la forma estándar. Es la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, -3)$ y radio 2. Si, como resultado de este proceso, obtuviésemos un número negativo en el lado derecho de la ecuación final, la ecuación no representaría curva alguna. Si obtuviésemos cero, la ecuación representaría un solo punto $(1, -3)$. ■

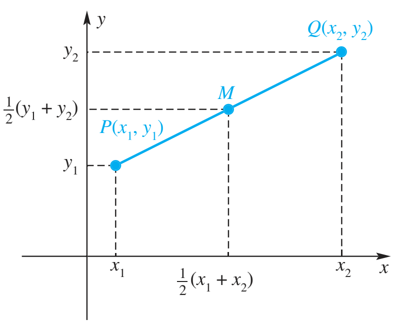


Figura 6

La fórmula del punto medio Considere dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ con $x_1 \le x_2$ y $y_1 \le y_2$, como en la figura 6. La distancia entre x_1 y x_2 es $x_2 - x_1$. Cuando le sumamos la mitad de esta distancia, $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, a x_1, obtenemos el punto medio entre x_1 y x_2.

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por lo tanto, el punto $(x_1 + x_2)/2$ es el punto medio entre x_1 y x_2 sobre el eje x y, en consecuencia, el punto medio M del segmento PQ tiene a $(x_1 + x_2)/2$ como su coordenada x. De manera análoga, podemos mostrar que $(y_1 + y_2)/2$ es la coordenada y de M. Así, tenemos la **fórmula del punto medio**

El punto medio del segmento de recta que une $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 4 Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como un diámetro el segmento que va de $(1, 3)$ a $(7, 11)$.

SOLUCIÓN El centro de la circunferencia está en el punto medio del diámetro; por lo tanto, el centro tiene coordenadas $(1 + 7)/2 = 4$ y $(3 + 11)/2 = 7$. La longitud del diámetro, obtenida por medio de la fórmula de distancia, es

$$\sqrt{(7 - 1)^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

de modo que el radio de la circunferencia es 5. La ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$$ ■

Rectas Considere la recta de la figura 7. Del punto A al punto B existe una **elevación** (cambio vertical) de 2 unidades y un **avance** (cambio horizontal) de 5 unidades. Decimos que la recta tiene una pendiente de 2/5. En general (véase la figura 8), para una recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, en donde $x_1 \neq x_2$, definimos la **pendiente** m de esa recta como

$$\boxed{m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

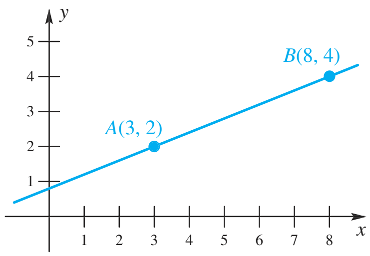


Figura 7

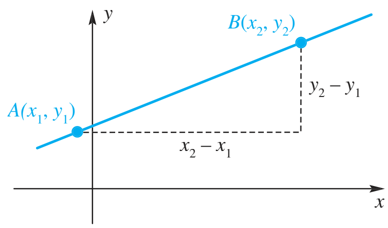


Figura 8

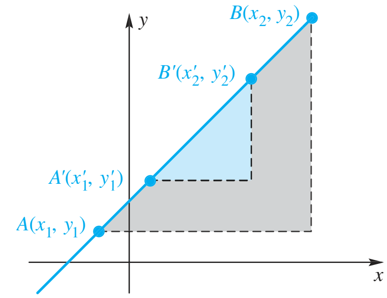


Figura 9

¿El valor que obtuvimos para la pendiente depende de la pareja de puntos que utilicemos para A y B? Los triángulos semejantes en la figura 9 nos muestran que

$$\frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Así, los puntos A' y B' darían lo mismo que A y B. Incluso, no importa si A está a la izquierda o a la derecha de B, ya que

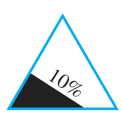
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Todo lo que importa es que restemos las coordenadas en el mismo orden en el numerador y el denominador.

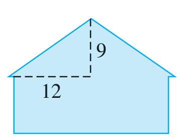
La pendiente m es una medida de la inclinación de una recta, como se ilustra en la figura 10. Observe que una recta horizontal tiene pendiente cero, una recta que se eleva hacia la derecha tiene pendiente positiva y una recta que desciende a la derecha tiene pendiente negativa. Mientras mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más inclinada será la recta. El concepto de pendiente de una recta vertical no tiene sentido, ya que implicaría la división entre cero. Por lo tanto, la pendiente para una recta vertical se deja indefinida.

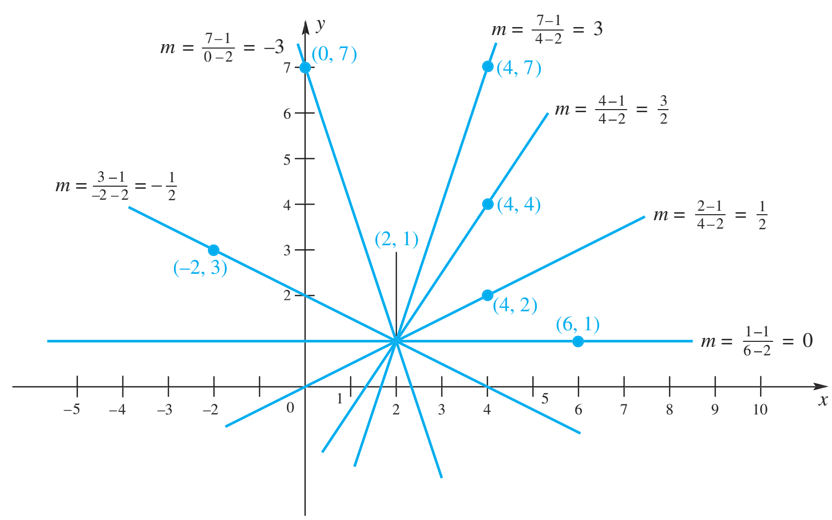
Grado (nivel) e inclinación

El símbolo internacional para la pendiente de un camino (llamado grado) se muestra abajo. El grado está dado como porcentaje. Un grado de 10% corresponde a una pendiente de ±0.10.



Los carpinteros utilizan el término *inclinación*. Una inclinación de 9:12 corresponde a una pendiente de $\frac{9}{12}$.





Rectas con pendientes diferentes

Figura 10

La forma punto-pendiente Otra vez, considere la recta de nuestro estudio inicial; se reproduce en la figura 11. Sabemos que esta recta

1. pasa por (3, 2) y
2. tiene pendiente $\frac{2}{5}$.

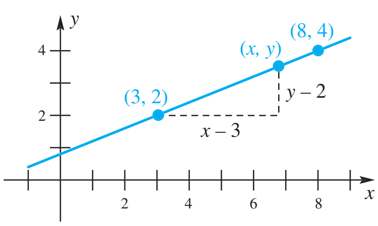


Figura 11

Tome cualquier otro punto de esta recta, como el que tiene coordenadas (x, y). Si utilizamos este punto y el punto $(3, 2)$ para medir la pendiente, debemos obtener $\frac{2}{5}$, es decir,

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{2}{5}$$

o, después de multiplicar por $x - 3$,

$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Observe que a esta última ecuación la satisfacen todos los puntos de la recta, incluso (3, 2). Además, ningún punto que no pertenezca a la recta puede satisfacer esta ecuación.

Lo que acabamos de hacer en un ejemplo lo podemos hacer en general. La recta que pasa por el punto (fijo) (x_1, y_1) con pendiente m tiene ecuación

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

A esta forma le llamamos **punto–pendiente** de la ecuación de una recta.

Una vez más considere la recta de nuestro ejemplo. Esa recta pasa por $(8, 4)$, así como por $(3, 2)$. Si utilizamos $(8, 4)$ como (x_1, y_1), obtenemos la ecuación

$$y - 4 = \tfrac{2}{5}(x - 8)$$

la cual parece muy diferente de $y - 2 = \frac{2}{5}(x - 3)$. Sin embargo, ambas pueden simplificarse a $5y - 2x = 4$; son equivalentes.

EJEMPLO 5 Determine una ecuación de la recta que pasa por $(-4, 2)$ y $(6, -1)$.

SOLUCIÓN La pendiente es $m = (-1 - 2)/(6 + 4) = -\frac{3}{10}$. Por lo tanto, usando $(-4, 2)$ como el punto fijo obtenemos la ecuación

$$y - 2 = -\tfrac{3}{10}(x + 4)$$ ■

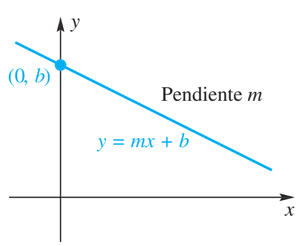


Figura 12

La forma pendiente intersección La ecuación de una recta puede expresarse de varias formas. Suponga que se nos ha dado la pendiente m de la recta y la intersección b con el eje y —es decir, la recta intersecta al eje y en $(0, b)$—, como se muestra en la figura 12. Al seleccionar $(0, b)$ como (x_1, y_1) y al aplicar la forma punto–pendiente, obtenemos

$$y - b = m(x - 0)$$

que puede reescribirse como

$$\boxed{y = mx + b}$$

La última se denomina forma **pendiente intersección**. En todo momento que veamos una ecuación escrita en esta forma, la reconocemos como una recta y de manera inmediata leemos su pendiente y su intersección con el eje y. Por ejemplo, considere la ecuación

$$3x - 2y + 4 = 0$$

Si despejamos la y, obtenemos

$$y = \tfrac{3}{2}x + 2$$

Ésta es la ecuación de una recta con pendiente $\frac{3}{2}$ e intersección con el eje y igual a 2.

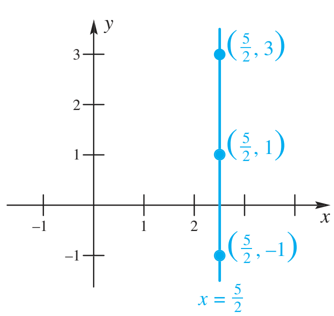


Figura 13

Ecuación de una recta vertical Las rectas verticales no caen dentro del estudio precedente, ya que el concepto de pendiente no está definido para ellas; aunque tienen ecuaciones muy sencillas. La recta en la figura 13 tiene ecuación $x = \frac{5}{2}$, ya que un punto está en la recta si y sólo si satisface esta ecuación. La ecuación de cualquier recta vertical puede escribirse en la forma $x = k$, donde k es una constante. Debe notarse que la ecuación de una recta horizontal puede escribirse en la forma $y = k$.

La forma $Ax + By + C = 0$ Sería bueno tener una forma que cubra todos los casos, incluyendo las rectas verticales. Por ejemplo, considere,

Resumen: ecuaciones de rectas
Recta vertical: $x = k$
Recta horizontal: $y = \mathrm{k}$
Forma punto–pendiente:
$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente intercepción:
$y = mx + b$
Ecuación lineal general:
$Ax + By + C = 0$

$$y - 2 = -4(x + 2)$$

$$y = 5x - 3$$

$$x = 5$$

Éstas pueden reescribirse (pasando todo al lado izquierdo) como sigue:

$$4x + y + 6 = 0$$
$$-5x + y + 3 = 0$$
$$x + 0y - 5 = 0$$

Todas tienen la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \qquad A \text{ y } B \text{ no son cero al mismo tiempo}}$$

que llamamos la **ecuación lineal general** (o ecuación general de la recta). Sólo se requiere un poco de reflexión para ver que la ecuación de cualquier recta puede escribirse en esta forma. Recíprocamente, la gráfica de la ecuación lineal general siempre es una recta.

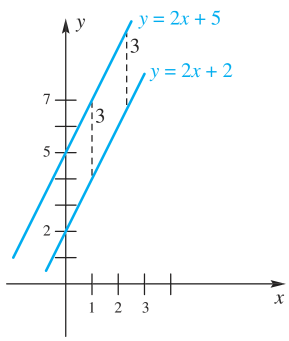


Figura 14

Rectas paralelas Se dice que dos rectas son paralelas cuando no tienen puntos en común. Por ejemplo, las rectas cuyas ecuaciones son $y = 2x + 2$ y $y = 2x + 5$ son paralelas porque, para todo valor de x, la segunda recta está tres unidades por arriba de la primera (véase la figura 14). De manera análoga, las rectas con ecuaciones $-2x + 3y + 12 = 0$ y $4x - 6y = 5$ son paralelas. Para ver esto, de cada ecuación despéjese y (*i.e., es decir*, escriba cada una en la forma pendiente intersección. Esto da $y = \frac{2}{3}x - 4$ y $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$, respectivamente. Otra vez, como las pendientes son iguales, una recta estará un número fijo de unidades por arriba o por debajo de la otra, de modo que las rectas nunca se intersectarán. Si dos rectas tienen la misma pendiente *y* la misma intersección y, entonces las dos rectas son la misma y no son paralelas.

Resumimos estableciendo que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente y diferentes intersecciones con el eje y. Dos rectas verticales son paralelas si y sólo si son rectas distintas.

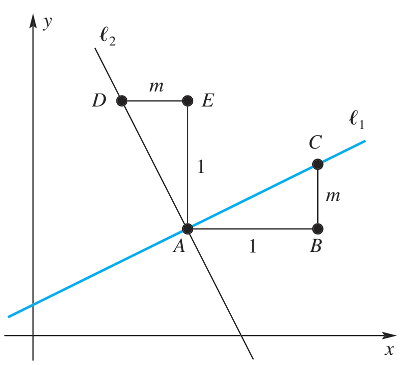


Figura 15

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (6, 8) y es paralela a la recta con ecuación $3x - 5y = 11$.

SOLUCIÓN Cuando despejamos la y de $3x - 5y = 11$, obtenemos $y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$, de la cual leemos que la pendiente de la recta es $\frac{3}{5}$. La ecuación de la recta deseada es

$$y - 8 = \tfrac{3}{5}(x - 6)$$

o, de manera equivalente, $y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$. Sabemos que estas rectas son distintas porque las intersecciones con el eje y son diferentes. ■

Rectas perpendiculares ¿Existe alguna condición sencilla que caracterice a las rectas perpendiculares? Sí; *dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas, una respecto de la otra.* Para ver por qué esto es verdadero, considere la figura 15. Ésta cuenta casi toda la historia; se deja como ejercicio (problema 57) construir una demostración geométrica de que dos rectas (no verticales) son perpendiculares si y sólo si $m_2 = -1/m_1$.

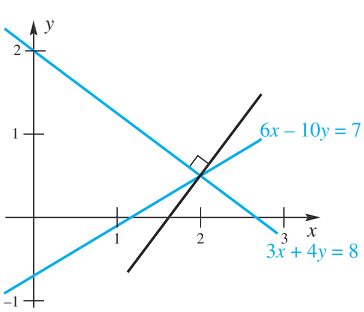


Figura 16

EJEMPLO 7 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas con ecuaciones $3x + 4y = 8$ y $6x - 10y = 7$ y que es perpendicular a la primera de estas rectas (véase la figura 16).

SOLUCIÓN Para encontrar el punto de intersección de las dos rectas, multiplicamos la primera ecuación por -2 y la sumamos a la segunda ecuación

$$\begin{array}{r} -6x - 8y = -16 \\ 6x - 10y = 7 \\ \hline -18y = -9 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Al sustituir $y = \frac{1}{2}$ en cualesquiera de las ecuaciones originales se obtiene $x = 2$. El punto de intersección es $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Cuando despejamos la y de la primera ecuación (para ponerla en la forma pendiente intersección), obtenemos $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Una recta perpendicular a ellas tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La ecuación de la recta requerida es

$$y - \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3}(x - 2)$$

■

Revisión de conceptos

1. La distancia entre los puntos $(-2, 3)$ y (x, y) es ________.

2. La ecuación de la circunferencia de radio 5 y centro en $(-4, 2)$ es ________.

3. El punto medio del segmento de recta que une a $(-2, 3)$ y $(5, 7)$ es ________.

4. La recta que pasa por (a, b) y (c, d) tiene pendiente $m =$ ________, siempre que $a \neq c$.

Conjunto de problemas 0.3

En los problemas del 1 al 4 grafique los puntos dados en el plano coordenado y luego determine la distancia entre ellos.

1. $(3, 1), (1, 1)$

2. $(-3, 5), (2, -2)$

3. $(4, 5), (5, -8)$

4. $(-1, 5), (6, 3)$

5. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(5, 3)$, $(-2, 4)$ y $(10, 8)$ es isósceles.

6. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(2, -4)$, $(4, 0)$ y $(8, -2)$ es un triángulo rectángulo.

7. Los puntos $(3, -1)$ y $(3, 3)$ son dos vértices de un cuadrado. Proporcione otros tres pares de posibles vértices.

8. Encuentre el punto en el eje x que sea equidistante de $(3, 1)$ y $(6, 4)$.

9. Determine la distancia entre $(-2, 3)$ y el punto medio del segmento de recta que une a $(-2, -2)$ y $(4, 3)$.

10. Determine la longitud del segmento de recta que une los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A = (1, 3)$, $B = (2, 6)$, $C = (4, 7)$ y $D = (3, 4)$.

En los problemas del 11 al 16 determine la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

11. Centro en $(1, 1)$, radio 1.

12. Centro en $(-2, 3)$, radio 4.

13. Centro en $(2, -1)$ y que pasa por $(5, 3)$.

14. Centro en $(4, 3)$ y que pasa por $(6, 2)$.

15. Diámetro AB, donde $A = (1, 3)$ y $B = (3, 7)$.

16. Centro en $(3, 4)$ y tangente al eje x.

En los problemas del 17 al 22 determine el centro y el radio de la circunferencia con la ecuación dada.

17. $x^2 + 2x + 10 + y^2 - 6y - 10 = 0$

18. $x^2 + y^2 - 6y = 16$

19. $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$

20. $x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$

21. $4x^2 + 16x + 15 + 4y^2 + 6y = 0$

22. $x^2 + 16x + \frac{105}{16} + 4y^2 + 3y = 0$

En los problemas del 23 al 28, determine la pendiente de la recta que contiene los dos puntos dados.

23. $(1, 1)$ y $(2, 2)$

24. $(3, 5)$ y $(4, 7)$

25. $(2, 3)$ y $(-5, -6)$

26. $(2, -4)$ y $(0, -6)$

27. $(3, 0)$ y $(0, 5)$

28. $(-6, 0)$ y $(0, 6)$

En los problemas del 29 al 34 determine una ecuación para cada recta. Luego escriba su respuesta en la forma $Ax + By + C = 0$.

29. Pasa por $(2, 2)$ con pendiente -1

30. Pasa por $(3, 4)$ con pendiente -1

31. Con intercepción y igual a 3 y pendiente 2

32. Con intercepción y igual a 5 y pendiente 0

33. Pasa por $(2, 3)$ y $(4, 8)$

34. Pasa por $(4, 1)$ y $(8, 2)$

En los problemas del 35 al 38 determine la pendiente y la intercepción con el eje y de cada recta.

35. $3y = -2x + 1$

36. $-4y = 5x - 6$

37. $6 - 2y = 10x - 2$ **38.** $4x + 5y = -20$

39. Escriba una ecuación para la recta que pasa por $(3, -3)$ y que es

(a) paralela a la recta $y = 2x + 5$;

(b) perpendicular a la recta $y = 2x + 5$;

(c) paralela a la recta $2x + 3y = 6$;

(d) perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$;

(e) paralela a la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, -1)$;

(f) paralela a la recta $x = 8$;

(g) perpendicular a la recta $x = 8$.

40. Determine el valor de c para el cual la recta $3x + cy = 5$

(a) pasa por el punto $(3, 1)$;

(b) es paralela al eje y;

(c) es paralela a la recta $2x + y = -1$;

(d) tiene intersecciones con el eje x y con el eje y iguales;

(e) es perpendicular a la recta $y - 2 = 3(x + 3)$.

41. Escriba la ecuación para la recta que pasa por $(-2, -1)$ y que es perpendicular a la recta $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 5)$.

42. Determine el valor de k, tal que la recta $kx - 3y = 10$

(a) es paralela a la recta $y = 2x + 4$;

(b) es perpendicular a la recta $y = 2x + 4$;

(c) es perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$.

43. ¿El punto $(3, 9)$ está por arriba o por debajo de la recta $y = 3x - 1$?

44. Demuestre que la ecuación de la recta con intersección con el eje x igual a $a \neq 0$ e intersección con el eje y igual a $b \neq 0$ puede escribirse como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

En los problemas del 45 al 48 determine las coordenadas del punto de intersección. Después escriba una ecuación para la recta que pasa por ese punto y que es perpendicular a la primera de las rectas dadas.

45. $2x + 3y = 4$
$-3x + y = 5$

46. $4x - 5y = 8$
$2x + y = -10$

47. $3x - 4y = 5$
$2x + 3y = 9$

48. $5x - 2y = 5$
$2x + 3y = 6$

49. Los puntos $(2, 3)$, $(6, 3)$, $(6, -1)$ y $(2, -1)$ son vértices de un cuadrado. Determine las ecuaciones de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

≈ **50.** Un banda se ajusta estrechamente alrededor de dos circunferencias, con ecuaciones $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ y $(x + 9)^2 + (y - 10)^2 = 16$. ¿Cuál es la longitud de dicha banda?

51. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

52. Encuentre una ecuación de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(8, 0)$ y $(0, 6)$.

53. Demuestre que las dos circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ y $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ no se intersectan. *Sugerencia:* Determine la distancia entre los dos centros.

54. ¿Qué relación deben cumplir a, b y c, si $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ es la ecuación de una circunferencia?

55. El techo de un ático forma un ángulo de 30° con el piso. Un tubo de 2 pulgadas de radio se coloca a lo largo del borde del ático, de tal manera que un lado del tubo toca el techo y el otro lado toca el piso (véase la figura 17). ¿Cuál es la distancia d desde el borde del ático hasta donde el tubo toca el piso?

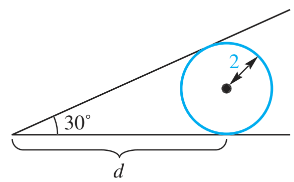


Figura 17

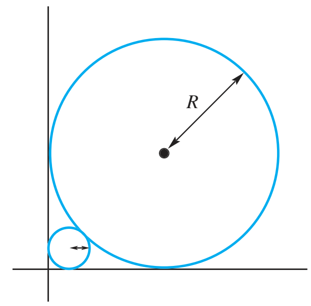


Figura 18

56. Una circunferencia de radio R se coloca en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 18. ¿Cuál es el radio r de la circunferencia más grande que puede colocarse entre la primera circunferencia y el origen?

57. Construya una demostración geométrica, con base en la figura 15, que pruebe que dos rectas son perpendiculares sí y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas una de la otra.

58. Demuestre que el conjunto de puntos que están al doble de distancia de $(3, 4)$ que de $(1, 1)$ forman una circunferencia. Determine su centro y radio.

59. El Teorema de Pitágoras dice que las áreas A, B y C de los cuadrados en la figura 19 satisfacen $A + B = C$. Demuestre que los semicírculos y los triángulos equiláteros satisfacen la misma relación y luego sugiera un teorema general de estos hechos.

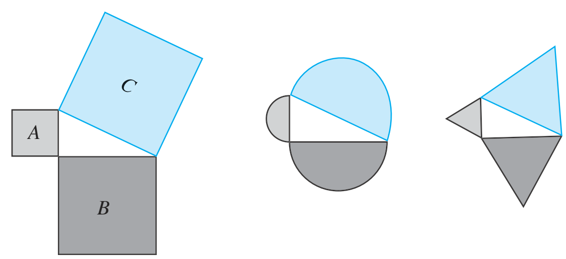


Figura 19

60. Considere una circunferencia C y un punto P exterior a ella. Sea PT el segmento de recta tangente a C en T, y suponga que la recta que pasa por P y por el centro de C intersecta a C en M y en N. Demuestre que $(PM)(PN) = (PT)^2$.

≈ **61.** Una banda se ajusta alrededor de las tres circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 8)^2 + y^2 = 4$ y $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4$, como se muestra en la figura 20. Determine la longitud de esta banda.

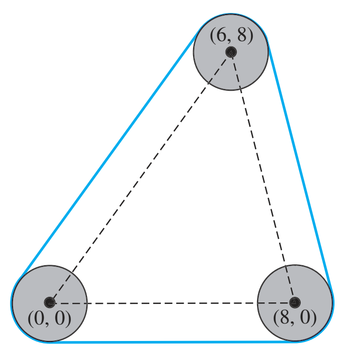


Figura 20

62. Estudie los problemas 50 y 61. Considere un conjunto de circunferencias de radio r que no se intersectan, cuyos centros son los vértices de un polígono convexo de n lados con longitudes $d_1, d_2, \ldots, d_n$. ¿Cuál es la longitud de la banda que se ajusta alrededor de estas circunferencias (de la misma forma que se muestra en la figura 20)?

Puede demostrarse que la distancia d del punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Utilice este resultado para determinar la distancia desde el punto dado hasta la recta dada.

63. $(-3, 2)$; $3x + 4y = 6$

64. $(4, -1)$; $2x - 2y + 4 = 0$

65. $(-2, -1)$; $5y = 12x + 1$

66. $(3, -1)$; $y = 2x - 5$

En los problemas 67 y 68 determine la distancia (perpendicular) entre las rectas paralelas dadas. Sugerencia: primero encuentre un punto sobre una de las rectas.

67. $2x + 4y = 7, 2x + 4y = 5$

68. $7x - 5y = 6, 7x - 5y = -1$

69. Determine la ecuación para la recta que biseca al segmento de recta que va de $(-2, 3)$ a $(1, -2)$ y que forma ángulos rectos con este segmento de recta.

70. El centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo se encuentra en los bisectores perpendiculares (mediatrices) de los lados. Utilice este hecho para encontrar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo con vértices $(0, 4)$, $(2, 0)$ y $(4, 6)$.

71. Determine el radio de la circunferencia que está inscrita en un triángulo con lados de longitudes 3, 4 y 5 (véase la figura 21).

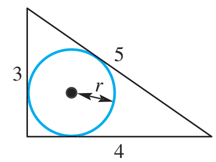


Figura 21

72. Suponga que (a, b) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Demuestre que la recta $ax + by = r^2$ es tangente a la circunferencia en (a, b).

73. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 0)$. *Sugerencia:* véase el problema 72.

74. Exprese la distancia perpendicular entre las rectas paralelas $y = mx + b$ y $y = mx + B$, en términos de m, b y B. *Sugerencia:* la distancia pedida es la misma que aquella entre $y = mx$ y $y = mx + B - b$.

75. Demuestre que la recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado. Sugerencia: puede suponer que el triángulo tiene vértices en $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c).

76. Demuestre que los segmentos de recta que unen a los puntos medios de lados adyacentes de cualquier cuadrilátero (polígono con cuatro lados) forman un paralelogramo.

≈ **77.** Una rueda cuyo borde tiene ecuación $x^2 + (y - 6)^2 = 25$ gira rápidamente en dirección contraria a las manecillas del reloj. Una partícula de lodo, en el borde, sale despedida en el punto $(3, 2)$ y vuela hacia la pared en $x = 11$. ¿Aproximadamente a qué altura pegará en la pared? *Sugerencia:* la partícula de lodo vuela de forma tangente tan rápido que los efectos de la gravedad son despreciables durante el tiempo que le toma golpear la pared.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$ **2.** $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$
3. $(1.5, 5)$ **4.** $(d - b)/(c - a)$

0.4 Gráficas de ecuaciones

El uso de coordenadas para puntos en el plano nos permite describir curvas (un objeto geométrico) por medio de una ecuación (un objeto algebraico). En las secciones anteriores vimos cómo esto se hizo para circunferencias y rectas. Ahora queremos considerar el proceso inverso: graficar una ecuación. La **gráfica de una ecuación** en x y y consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación; es decir, hacen verdadera la igualdad.

Procedimiento para graficar Para graficar una ecuación, por ejemplo, $y = 2x^3 - x + 19$, manualmente, podemos seguir un procedimiento sencillo de tres pasos:

Paso 1: Obtener las coordenadas de algunos puntos que satisfagan la ecuación.

Paso 2: Graficar estos puntos en el plano.

Paso 3: Conectar los puntos con una curva suave.

Este método simplista tendrá que ser suficiente hasta el capítulo 3, cuando utilizaremos métodos más avanzados para graficar ecuaciones. La mejor forma de hacer el paso 1 es construir una tabla de valores. Asignar valores a una de las variables, tal como x, y determinar los valores correspondientes de la otra variable, creando una lista, en forma tabular, de los resultados.

Una calculadora gráfica o un sistema de álgebra por computadora (CAS, del inglés computer algebra sistem) seguirán un procedimiento muy similar, aunque su proceso es transparente para el usuario. Un usuario sólo define la función y pide a la calculadora gráfica, o a la computadora, que la grafique.

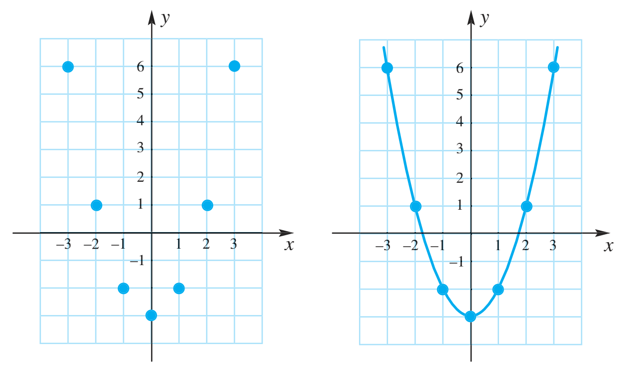
EJEMPLO 1 Haga la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN El procedimiento de tres pasos se muestra en la figura 1.

$y = x^2 - 3$

x	y
–3	6
–2	1
–1	–2
0	–3
1	–2
2	1
3	6

Paso 1
Construya una tabla de valores

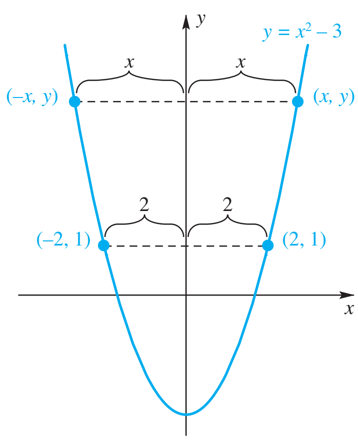


Paso 2
Trace esos puntos

Paso 3
Conecte esos puntos por medio de una curva suave

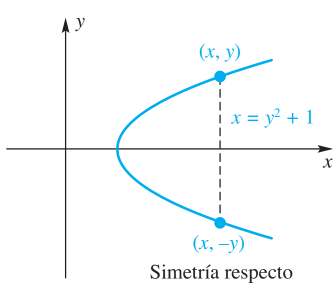
Figura 1

Por supuesto, usted necesita un poco de sentido común y hasta un poco de fe. Cuando obtenga puntos que parecen fuera de lugar, verifique sus cálculos. Cuando conecte los puntos que ha trazado por medio de una curva suave, estará suponiendo que la curva se comporta de manera regular entre puntos consecutivos, lo cual es un acto de fe. Por esto, usted debe graficar suficientes puntos de modo que el esbozo de la curva parezca ser claro; entre más puntos grafique, menos fe necesitará. También, debe reconocer que rara vez muestra la curva completa. En nuestro ejemplo, la curva tiene ramas infinitamente largas que se amplían cada vez más. Pero nuestra gráfica muestra las características esenciales. Ésta es nuestra meta al graficar. Mostrar lo suficiente de la gráfica de modo que las características esenciales sean visibles. Más adelante (sección 3.5) usaremos las herramientas del cálculo para refinar y mejorar nuestra comprensión de las gráficas.



Simetría respecto al eje y

Figura 2



Simetría respecto al eje x

Figura 3

Simetría de una gráfica Algunas veces podemos reducir a la mitad el trabajo de graficar, si reconocemos ciertas simetrías de la gráfica reveladas por su ecuación. Observe la gráfica de $y = x^2 - 3$, dibujada anteriormente y otra vez en la figura 2. Si el plano coordenado se doblase a lo largo del eje y, las dos ramas de la gráfica coincidirían. Por ejemplo, (3, 6) coincidiría con (–3, 6); (2, 1) coincidiría con (–2, 1); y de una manera más general, (x, y) coincidiría con $(-x, y)$. De forma algebraica, esto corresponde al hecho de que reemplazar x por $-x$ en la ecuación $y = x^2 - 3$ resulta en una ecuación equivalente.

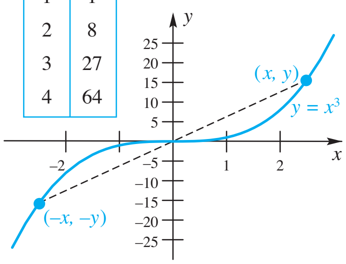
Considere una gráfica arbitraria. Es simétrica respecto al eje y si siempre que (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica (véase la figura 2). De forma análoga, es simétrica respecto al eje x si siempre que (x, y) está en la gráfica, $(x, -y)$ también está en la gráfica (véase la figura 3). Por último, una gráfica es simétrica respecto al origen si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también está en la gráfica (véase el ejemplo 2).

En términos de ecuaciones, tenemos tres pruebas sencillas. La gráfica de una ecuación es

1. simétrica respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $y = x^2$);
2. simétrica respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $x = y^2 + 1$);
3. simétrica respecto al origen, si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente [$y = x^3$ es un buen ejemplo ya que $-y = (-x)^3$ es equivalente a $y = x^3$].

$y = x^3$

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64



Simetría respecto al origen

Figura 4

EJEMPLO 2 Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3$.

SOLUCIÓN Notemos, como se señaló anteriormente, que la gráfica será simétrica con respecto al origen, así que sólo necesitamos obtener una tabla de valores para x no negativa; por medio de la simetría podemos determinar puntos que estén apareados. Por ejemplo, que $(2, 8)$ pertenezca a la gráfica nos dice que $(-2, -8)$ está en la gráfica; que $(3, 27)$ esté en la gráfica nos dice que $(-3, -27)$ está en la gráfica, y así sucesivamente. Véase la figura 4. ■

Al graficar $y = x^3$, utilizamos una escala más pequeña en el eje y que en el eje x. Esto hizo posible mostrar una parte mayor de la gráfica (al aplanarse, la gráfica también se distorsionó). Cuando grafique a mano, le sugerimos que antes de colocar las escalas en los dos ejes debe examinar su tabla de valores. Seleccione escalas de modo que todos, o la mayoría de los puntos, puedan graficarse y se conserve su gráfica de tamaño razonable. Con frecuencia, una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (CAS) seleccionan la escala para las y una vez que usted ha elegido las x que se utilizarán. Por lo tanto, la primera elección que usted hace es graficar los valores de x. La mayoría de las calculadoras gráficas y los CAS le permiten pasar por alto el escalamiento automático del eje y. Es posible que en algunos casos usted necesite esta opción.

Calculadoras gráficas

Si usted tiene una calculadora gráfica, utilícela siempre que sea posible para reproducir las gráficas que se muestran en las figuras.

Intersecciones con los ejes coordenados

Los puntos en donde la gráfica de una ecuación cruza los ejes coordenados tienen un papel importante en muchos problemas. Por ejemplo, considere

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Observe que $y = 0$ cuando $x = -2, 1, 3$. Los números -2, 1 y 3 se denominan **intersecciones con el eje *x***. De manera análoga, $y = 6$ cuando $x = 0$, y así, 6 se llama la **intersección con el eje *y***.

EJEMPLO 3 Determine todas las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de $y^2 - x + y - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Haciendo $y = 0$ en la ecuación dada, obtenemos $x = -6$, y así, la intersección con el eje x es -6. Haciendo $x = 0$ en la ecuación, encontramos que $y^2 + y - 6 = 0$, o $(y + 3)(y - 2) = 0$; las intersecciones con el eje y son -3 y 2. Una verificación de las simetrías indica que la gráfica no tiene ninguna simetría de los tres tipos estudiados anteriormente. La gráfica se muestra en la figura 5. ■

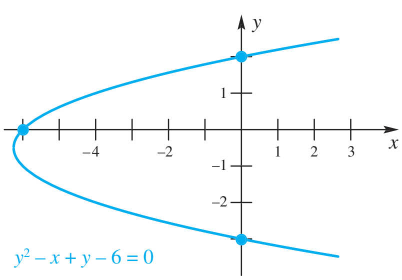


Figura 5

Como las ecuaciones cuadráticas y cúbicas con frecuencia se utilizarán como ejemplos en el trabajo posterior, mostramos sus gráficas comunes en la figura 6.

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas son curvas en forma de copas llamadas **parábolas**. Si una ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, o $x = ay^2 + by + c$, con $a \neq 0$; su gráfica es una parábola. En el primer caso, la gráfica se abre hacia arriba, si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$. En el segundo caso, la gráfica se abre hacia la derecha si $a > 0$ y se abre hacia la izquierda si $a < 0$. Observe que la ecuación del ejemplo 3 puede ponerse en la forma $x = y^2 + y - 6$.

Intersecciones de gráficas

Con frecuencia, necesitamos conocer los puntos de intersección de dos gráficas. Estos puntos se determinan cuando se resuelven, de manera simultánea, las dos ecuaciones para las gráficas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determine los puntos de intersección de la recta $y = -2x + 2$ y la parábola $y = 2x^2 - 4x - 2$, y haga un bosquejo de ambas gráficas en el mismo plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Debemos resolver de manera simultánea las dos ecuaciones. Esto es fácil de hacer al sustituir la expresión para y de la primera ecuación en la segunda y al despejar enseguida la x de la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= 2x^2 - 4x - 2 \\ 0 &= 2x^2 - 2x - 4 \\ 0 &= 2(x + 1)(x - 2) \\ x &= -1, \qquad x = 2 \end{aligned}$$

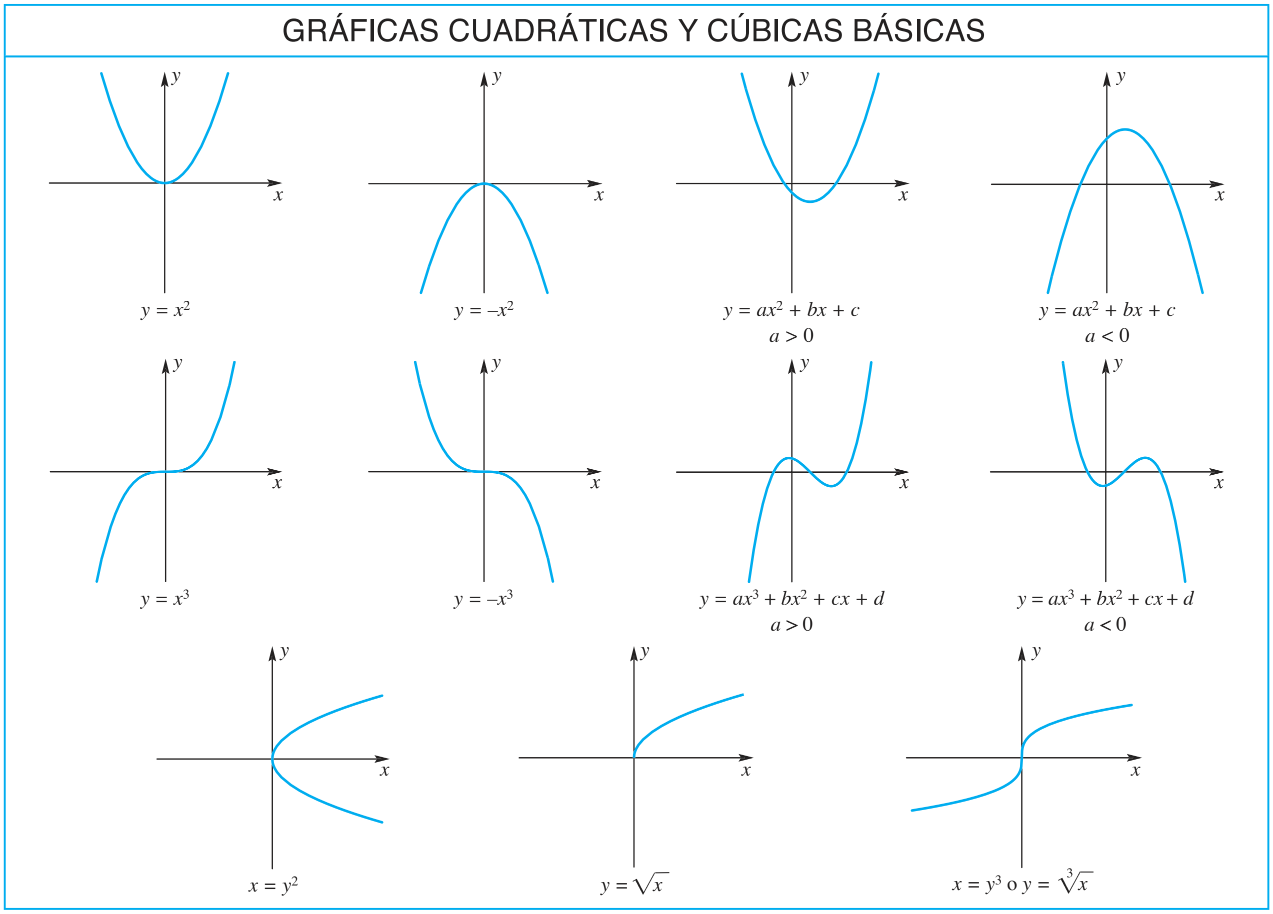


Figura 6

Por medio de sustitución, encontramos que los valores correspondientes de y son 4 y -2; por lo tanto, los puntos de intersección son $(-1, 4)$ y $(2, -2)$. Las dos gráficas se muestran en la figura 7.

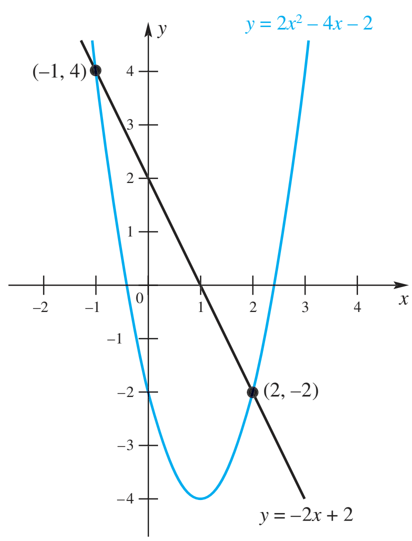


Figura 7 ■

Revisión de conceptos

1. Si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, y)$ también está en ella; entonces, la gráfica es simétrica respecto a _______.

2. Si $(-4, 2)$ está en una gráfica que es simétrica respecto al origen, entonces _______ también está en la gráfica.

3. La gráfica de $y = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$ tiene intersección con el eje y _______ e intersecciones con el eje x _______.

4. La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una _______ si $a = 0$ y una _______ si $a \neq 0$.

Conjunto de problemas 0.4

En los problemas del 1 al 30 trace la gráfica de cada ecuación. Comience con la verificación de las simetrías y asegúrese de encontrar todas las intersecciones con el eje x *y el eje* y.

1. $y = -x^2 + 1$

2. $x = -y^2 + 1$

3. $x = -4y^2 - 1$

4. $y = 4x^2 - 1$

5. $x^2 + y = 0$

6. $y = x^2 - 2x$

7. $7x^2 + 3y = 0$

8. $y = 3x^2 - 2x + 2$

9. $x^2 + y^2 = 4$

10. $3x^2 + 4y^2 = 12$

11. $y = -x^2 - 2x + 2$

12. $4x^2 + 3y^2 = 12$

13. $x^2 - y^2 = 4$

14. $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

15. $4(x - 1)^2 + y^2 = 36$

16. $x^2 - 4x + 3y^2 = -2$

17. $x^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **18.** $x^4 + y^4 = 1$

GC **19.** $x^4 + y^4 = 16$

GC **20.** $y = x^3 - x$

GC **21.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

GC **22.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

GC **23.** $2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y = -2$

GC **24.** $4(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **25.** $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

GC **26.** $y = x^2(x - 1)(x - 2)$

GC **27.** $y = x^2(x - 1)^2$

GC **28.** $y = x^4(x - 1)^4(x + 1)^4$

GC **29.** $|x| + |y| = 1$

GC **30.** $|x| + |y| = 4$

GC *En los problemas del 31 al 38, en el mismo plano coordenado, trace las gráficas de ambas ecuaciones. Determine y etiquete los puntos de intersección de las dos gráficas (véase el ejemplo 4).*

31. $y = -x + 1$
$y = (x + 1)^2$

32. $y = 2x + 3$
$y = -(x - 1)^2$

33. $y = -2x + 3$
$y = -2(x - 4)^2$

34. $y = -2x + 3$
$y = 3x^2 - 3x + 12$

35. $y = x$
$x^2 + y^2 = 4$

36. $y = x - 1$
$2x^2 + 3y^2 = 12$

37. $y - 3x = 1$
$x^2 + 2x + y^2 = 15$

38. $y = 4x + 3$
$x^2 + y^2 = 81$

39. Seleccione la ecuación que corresponda a cada una de las gráficas en la figura 8.

(a) $y = ax^2$, con $a > 0$

(b) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$

(c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$

(d) $y = ax^3$, con $a > 0$

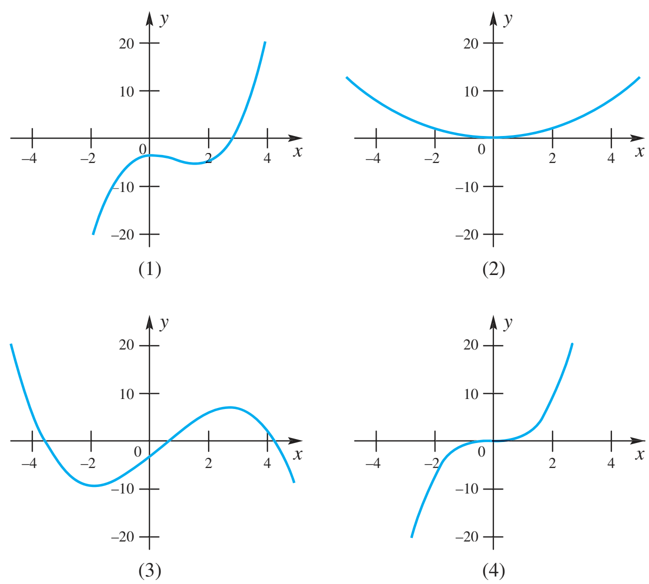


Figura 8

≈ **40.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

≈ **41.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 20$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** el eje y **2.** $(4, -2)$ **3.** 8; -2, 1, 4 **4.** recta; parábola

0.5 Funciones y sus gráficas

En todas las matemáticas, el concepto de función es uno de los más básicos y desempeña un papel indispensable en cálculo.

> **Definición**
>
> Una **función** f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado **dominio**— un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función. (Véase la figura 1).

Piense en una función como una máquina que toma como entrada un valor x y produce una salida $f(x)$. (Véase la figura 2). Cada valor de entrada se hace corresponder con un *solo* valor de salida. No obstante, puede suceder que diferentes valores de entrada den el mismo valor de salida.

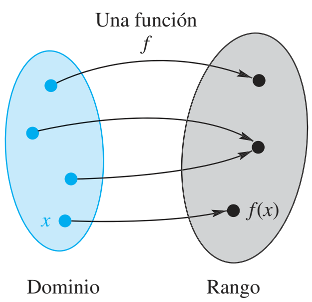


Figura 1

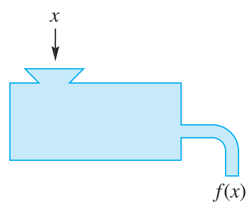


Figura 2

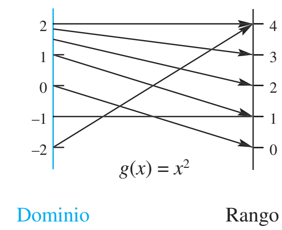


Figura 3

La definición no pone restricción sobre los conjuntos del dominio y del rango. El dominio podría consistir en el conjunto de personas en su curso de cálculo, el rango el conjunto de calificaciones $\{A, B, C, D, F\}$ que obtendrán y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones. Casi todas las funciones que usted encontrará en este texto serán funciones de uno o más números reales. Por ejemplo, la función g podría tomar un número real x y elevarlo al cuadrado, lo cual produciría el número real x^2. En este caso tenemos una fórmula que da la regla de correspondencia; esto es, $g(x) = x^2$. Un diagrama esquemático de esta función se muestra en la figura 3.

Notación funcional Una sola letra como f (o g o F) se utiliza para nombrar una función. Entonces $f(x)$, que se lee "f de x" o "f en x", denota el valor que f asigna a x. Por lo tanto, si $f(x) = x^3 - 4$, entonces

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$
$$f(a) = a^3 - 4$$
$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Estudie cuidadosamente los siguientes ejemplos. Aunque algunos podrían parecer extraños, tendrán un papel importante en el capítulo 2.

EJEMPLO 1 Para $f(x) = x^2 - 2x$, determine y simplifique

(a) $f(4)$ (b) $f(4 + h)$
(c) $f(4 + h) - f(4)$ (d) $[f(4 + h) - f(4)]/h$

SOLUCIÓN

(a) $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

(b) $f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4 + h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$
$= 8 + 6h + h^2$

(c) $f(4 + h) - f(4) = 8 + 6h + h^2 - 8 = 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = \dfrac{h(6 + h)}{h} = 6 + h$ ■

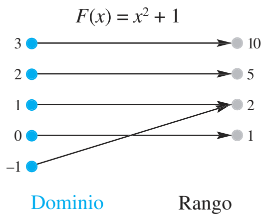


Figura 4

Dominio y rango Para especificar por completo una función, debemos establecer, además de la regla de correspondencia, el dominio de la función. Por ejemplo, si F es la función definida por $F(x) = x^2 + 1$ con dominio $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (véase la figura 4), entonces el rango es $\{1, 2, 5, 10\}$. La regla de correspondencia, junto con el dominio, determina el rango.

Cuando no se especifica un dominio para una función, suponemos que es el conjunto más grande de números reales para el cual la regla de la función tiene sentido. Éste se denomina **dominio natural**. Los números que debe recordar para excluirlos del dominio natural son aquellos que causarían una división entre cero o la raíz cuadrada de un número negativo.

EJEMPLO 2 Determine los dominios naturales para

(a) $f(x) = 1/(x - 3)$ (b) $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

(c) $h(w) = 1/\sqrt{9 - w^2}$

SOLUCIÓN

(a) Debemos excluir al 3 del dominio porque requeriría una división entre cero. Así, el dominio natural es $\{x\colon x \neq 3\}$. Esto se puede leer como "el conjunto de las x, tales que x no es igual a 3".

(b) Para evitar la raíz cuadrada de un número negativo debemos elegir t, de modo que $9 - t^2 \geq 0$. Así, t debe satisfacer $|t| \leq 3$. Por lo tanto, el dominio natural es $\{t\colon |t| \leq 3\}$, que mediante la notación de intervalos puede escribirse como $[-3, 3]$.

(c) Ahora debemos evitar la división entre cero y las raíces cuadradas de números negativos, de modo que excluimos a -3 y 3 del dominio natural. Por lo tanto, el dominio natural es el intervalo $(-3, 3)$. ■

Cuando la regla para una función está dada por medio de una ecuación de la forma $y = f(x)$, llamamos a la x **variable independiente** y a la y **variable dependiente**. *Cualquier* valor en el dominio puede sustituirse por la variable independiente. Una vez seleccionado, este valor de x determina completamente el correspondiente valor de la variable dependiente y.

La entrada para una función no necesita ser un solo número real. En muchas aplicaciones importantes, una función depende de más de una variable independiente. Por ejemplo, el monto A del pago mensual de un automóvil depende del préstamo del capital P, la tasa de interés r y el número n de pagos mensuales solicitados. Podríamos escribir tal función como $A(P, r, n)$. El valor de A (16000, 0.07, 48) —es decir, el pago mensual requerido para saldar un préstamo de \$16,000 en 48 meses a una tasa de interés anual de 7%— es \$383.14. En esta situación no existe una fórmula matemática sencilla que proporcione la salida A en términos de las variables de entrada P, r y n.

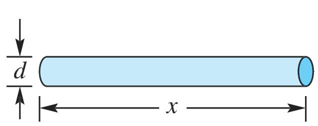


Figura 5

EJEMPLO 3 Denótese con $V(x, d)$ el volumen de una varilla cilíndrica de longitud x y diámetro d. (Véase la figura 5.) Determine

(a) una fórmula para $V(x, d)$
(b) el dominio y rango de V
(c) $V(4, 0.1)$

SOLUCIÓN

(a) $V(x, d) = x \cdot \pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi x d^2}{4}$

(b) Puesto que la longitud y el diámetro de la varilla deben ser positivos, el dominio es el conjunto de pares ordenados (x, d) donde $x > 0$ y $d > 0$. Cualquier volumen positivo es posible, de modo que el rango es $(0, \infty)$.

(c) $V(4, 0.1) = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot 0.1^2}{4} = 0.01\pi$ ■

Calculadora graficadora

Recuerde, utilice su calculadora graficadora para reproducir las figuras en este libro. Experimente con diferentes ventanas hasta que se convenza de que comprende todos los aspectos importantes de la gráfica.

Gráficas de funciones Cuando el dominio y el rango de una función son conjuntos de números reales, podemos describir la función mediante el trazo de su gráfica en un plano coordenado. La **gráfica de una función** f simplemente es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

EJEMPLO 4 Bosqueje las gráficas de

(a) $f(x) = x^2 - 2$ (b) $g(x) = 2/(x - 1)$

SOLUCIÓN Los dominios naturales de f y g son todos los números reales y todos los números reales excepto el 1, respectivamente. Mediante el procedimiento descrito en la sección 0.4 (construir una tabla de valores, trazar los puntos correspondientes, conectarlos por medio de una curva suave) obtenemos las dos gráficas que se muestran en las figuras 6 y 7a. ■

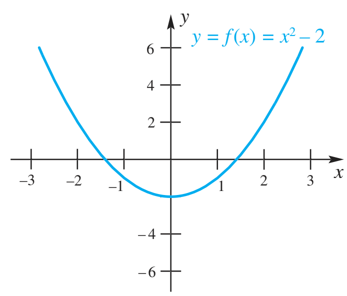
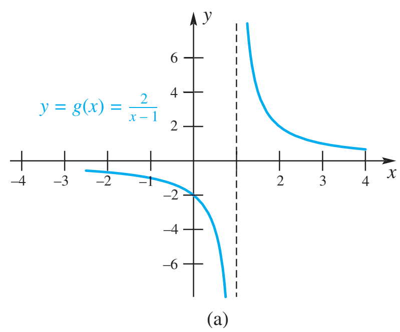


Figura 6



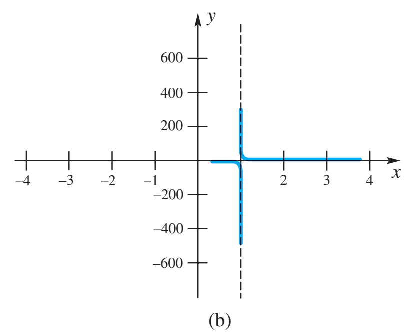


Figura 7

Ponga atención especial en la gráfica de g; ésta apunta a una sobresimplificación de lo que hemos realizado y ahora necesitamos corregir. Cuando se unen los puntos por medio de una curva suave, no se efectúa de una manera mecánica que ignore las características especiales que podrían ser aparentes en la fórmula de la función. En el caso $g(x) = 2/(x - 1)$, algo drástico sucede cuando x se aproxima a 1. De hecho, los valores de $|g(x)|$ aumentan sin cota; por ejemplo, $g(0.99) = 2/(0.99 - 1) = -200$ y $g(1.001) = 2000$. Esto lo hemos indicado mediante una recta vertical, llamada **asíntota**, en $x = 1$. Cuando x se acerca a 1, la gráfica se aproxima cada vez más a esta recta, aunque la recta no es parte de la gráfica. Más bien es una guía. Observe que la gráfica de g también tiene una asíntota horizontal, el eje x.

Funciones como $g(x) = 2/(x - 1)$ pueden causar problemas cuando usted las grafica por medio de un CAS. Por ejemplo, cuando se le pidió a *Maple* graficar $g(x) = 2/(x - 1)$ en el dominio $[-4, 4]$ respondió con la gráfica que se muestra en la figura 7b. Los CAS utilizan un algoritmo muy parecido al que se describió en la sección 0.4; seleccionan diversos valores para x en el dominio establecido; encuentran los correspondientes valores de y, y dibujan estos puntos conectándolos con rectas. Cuando *Maple* seleccionó un número cercano a 1, la salida resultante fue grande, lo cual llevó al eje y a escalar en la figura. *Maple* también conecta los puntos que cruzan el punto de corte en $x = 1$. Siempre debe tener precaución y ser cuidadoso cuando utilice una calculadora gráfica o un CAS para graficar funciones.

Los dominios y rangos para las funciones f y g se muestran en la siguiente tabla.

Función	Dominio	Rango
$f(x) = x^2 - 2$	todos los números reales	$\{y: y \geq -2\}$
$g(x) = \dfrac{2}{x - 1}$	$\{x: x \neq 1\}$	$\{y: y \neq 0\}$

Funciones pares y funciones impares Con frecuencia podemos predecir las simetrías de la gráfica de una función al examinar la fórmula para la función. Si $f(-x) = f(x)$ para toda x, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje y. Tal función se denomina

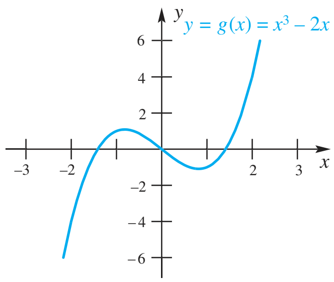


Figura 8

función par, quizá porque una función que se especifica $f(x)$ como una suma de sólo potencias pares de x es par. La función $f(x) = x^2 - 2$ (graficada en la figura 6) es par; al igual que $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 11x^2 - 5$, $f(x) = x^2/(1 + x^4)$ y $f(x) = (x^3 - 2x)/3x$.

Si $f(-x) = -f(x)$ para toda x, la gráfica es simétrica con respecto al origen. A tal función le llamamos **función impar**. Una función que da $f(x)$ como una suma de sólo potencias impares de x es impar. Así, $g(x) = x^3 - 2x$ (graficada en la figura 8) es impar. Observe que

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$$

Considere la función $g(x) = 2/(x - 1)$ del ejemplo 4 que graficamos en la figura 7. No es par ni impar. Para ver esto, note que $g(-x) = 2/(-x - 1)$, que no es igual ni a $g(x)$ ni a $-g(x)$. Observe que la gráfica de $y = g(x)$ no es simétrica respecto al eje y ni con respecto al origen.

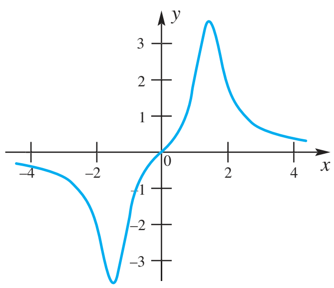


Figura 9

EJEMPLO 5 ¿$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$ es par, impar o ninguna de éstas?

SOLUCIÓN Como

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 4} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^4 - 3x^2 + 4} = -f(x)$$

f es una función impar. La gráfica de $y = f(x)$ (véase la figura 9) es simétrica respecto al origen. ■

Dos funciones especiales Entre las funciones que con frecuencia utilizaremos como ejemplos, hay dos que son muy especiales: la **función valor absoluto**, $|\ \ |$, y la **función máximo entero**, $[\![\ \ ]\!]$. Se definen como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$[\![x]\!] = \text{el mayor entero que es menor o igual a } x$$

Así, $|-3.1| = |3.1| = 3.1$, mientras que $[\![-3.1]\!] = -4$ y $[\![3.1]\!] = 3$. En las figuras 10 y 11 mostramos las gráficas de estas dos funciones. La función valor absoluto es par, ya que $|-x| = |x|$. La función máximo entero no es par ni impar, como lo puede ver con base en su gráfica.

Con frecuencia recurrimos a las siguientes características especiales de estas gráficas. La gráfica de $|x|$ tiene un pico en el origen, mientras que la gráfica de $[\![x]\!]$ da un salto en cada entero.

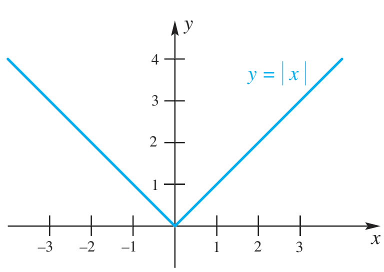


Figura 10

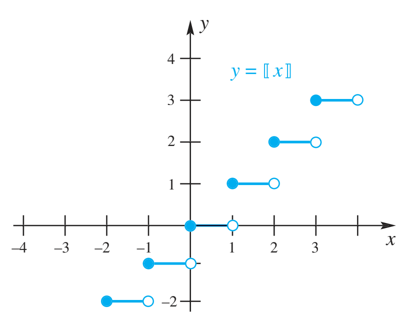


Figura 11

Revisión de conceptos

1. El conjunto de entradas permisibles para una función se denomina _______ de la función; el conjunto de salidas que se obtienen se denomina _______ de la función.

2. Si $f(x) = 3x^2$, entonces $f(2u) =$ _______ y $f(x + h) =$ _______.

3. Si $f(x)$ se acerca cada vez más a L, cuando $|x|$ aumenta indefinidamente, entonces la recta $y = L$ es una _______ para la gráfica de f.

4. Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces f se denomina función _______; si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces f se llama función _______. En el primer caso, la gráfica de f es simétrica con respecto al _______; en el segundo caso, es simétrica con respecto al _______.

Conjunto de problemas 0.5

1. Para $f(x) = 1 - x^2$, determine cada valor.

(a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(0)$
(d) $f(k)$ (e) $f(-5)$ (f) $f\left(\frac{1}{4}\right)$
(g) $f(1 + h)$ (h) $f(1 + h) - f(1)$
(i) $f(2 + h) - f(2)$

2. Para $F(x) = x^3 + 3x$, determine cada valor.

(a) $F(1)$ (b) $F\left(\sqrt{2}\right)$ (c) $F\left(\frac{1}{4}\right)$
(d) $F(1 + h)$ (e) $F(1 + h) - F(1)$
(f) $F(2 + h) - F(2)$

3. Para $G(y) = 1/(y - 1)$, determine cada valor.

(a) $G(0)$ (b) $G(0.999)$ (c) $G(1.01)$
(d) $G(y^2)$ (e) $G(-x)$ (f) $G\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

4. Para $\Phi(u) = \dfrac{u + u^2}{\sqrt{u}}$, encuentre cada valor. (Φ es la letra griega fi mayúscula).

(a) $\Phi(1)$ (b) $\Phi(-t)$ (c) $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$
(d) $\Phi(u + 1)$ (e) $\Phi(x^2)$ (f) $\Phi(x^2 + x)$

5. Para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$$

determine cada valor.

(a) $f(0.25)$ (b) $f(\pi)$ (c) $f\left(3 + \sqrt{2}\right)$

C **6.** Para $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}/\left(x - \sqrt{3}\right)$, determine cada valor.

(a) $f(0.79)$ (b) $f(12.26)$ (c) $f\left(\sqrt{3}\right)$

7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones determinan una función f con fórmula $y = f(x)$? Para aquellas que lo sean, determine $f(x)$. *Sugerencia:* despeje la y en términos de x y observe que la definición requiere un solo valor de y para cada x.

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $xy + y + x = 1, x \neq -1$
(c) $x = \sqrt{2y + 1}$ (d) $x = \dfrac{y}{y + 1}$

8. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 12 son gráficas de funciones?

Este problema sugiere una regla: *para que una gráfica sea la gráfica de una función, cada recta vertical debe cortar la gráfica en sólo un punto*.

9. Para $f(x) = 2x^2 - 1$ determine y simplifique $[f(a + h) - f(a)]/h$.

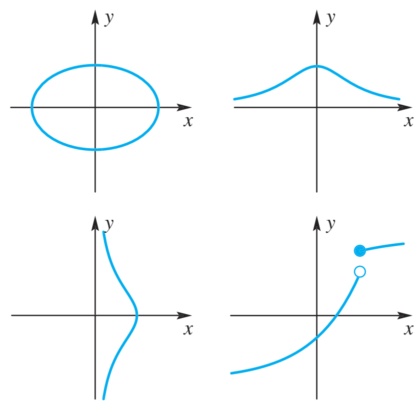


Figura 12

10. Para $F(t) = 4t^2$ determine y simplifique $[F(a + h) - F(a)]/h$.

11. Para $g(u) = 3/(u - 2)$ determine y simplifique $[g(x + h) - g(x)]/h$.

12. Para $G(t) = t/(t + 4)$ determine y simplifique $[G(a + h) - G(a)]/h$.

13. Determine el dominio natural para cada caso siguiente.

(a) $F(z) = \sqrt{2z + 3}$ (b) $g(v) = 1/(4v - 1)$
(c) $\psi(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (d) $H(y) = -\sqrt{625 - y^4}$

14. En cada caso determine el dominio natural.

(a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 6}$ (b) $G(y) = \sqrt{(y + 1)^{-1}}$
(c) $\phi(u) = |2u + 3|$ (d) $F(t) = t^{2/3} - 4$

En los problemas del 15 al 30 especifique si la función dada es par, impar o ninguna de las dos, y luego bosqueje su gráfica.

15. $f(x) = -4$ **16.** $f(x) = 3x$
17. $F(x) = 2x + 1$ **18.** $F(x) = 3x - \sqrt{2}$
19. $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ **20.** $g(u) = \dfrac{u^3}{8}$
21. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **22.** $\phi(z) = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$
23. $f(w) = \sqrt{w - 1}$ **24.** $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
25. $f(x) = |2x|$ **26.** $F(t) = -|t + 3|$
27. $g(x) = \left[\!\left[\dfrac{x}{2}\right]\!\right]$ **28.** $G(x) = [\![2x - 1]\!]$

29. $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ t+1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

30. $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

31. Una planta tiene la capacidad para producir desde 0 hasta 100 computadoras por día. Los gastos generales diarios de la planta ascienden a \$5000 y el costo directo (mano de obra y materiales) para producir una computadora es de \$805. Escriba una fórmula para $T(x)$, el costo total de producir x computadoras en un día y, también, para el costo unitario $u(x)$ (costo promedio por computadora). ¿Cuáles son los dominios de estas funciones?

C **32.** A la compañía ABC le cuesta $400 + 5\sqrt{x(x-4)}$ dólares fabricar x estufas de juguete que vende en \$6 cada una.

(a) Determine una fórmula para $P(x)$, la utilidad total de fabricar x estufas.

(b) Evalúe $P(200)$ y $P(1000)$.

(c) ¿Cuántas estufas debe fabricar ABC para estar en equilibrio?

C **33.** Determine la fórmula para la cantidad $E(x)$ por la cual un número x excede a su cuadrado. Haga una gráfica de $E(x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Utilice la gráfica para estimar el número positivo menor o igual a uno que excede a su cuadrado en la máxima cantidad.

34. Sea p el perímetro de un triángulo equilátero. Determine una fórmula para $A(p)$, el área de tal triángulo.

35. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa fija de longitud h y un cateto tiene longitud x. Determine una fórmula para la longitud, $L(x)$, del otro cateto.

36. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa fija de longitud h y un cateto tiene longitud x. Determine una fórmula para el área, $A(x)$, del triángulo.

37. La Agencia de Renta de Automóviles Acme cobra \$24 por día por la renta de un automóvil más \$0.40 por milla.

(a) Escriba una fórmula para el gasto de renta total $E(x)$ por un día, en donde x es el número de millas recorridas.

(b) Si usted renta un automóvil durante un día, ¿cuántas millas puede recorrer por \$120?

38. Un cilindro circular recto de radio r está inscrito en una esfera de radio $2r$. Determine una fórmula para $V(r)$, el volumen del cilindro en términos de r.

39. Una pista de una milla tiene lados paralelos y extremos semicirculares iguales. Determine una fórmula para el área encerrada por la pista, $A(d)$, en términos del diámetro d de los semicírculos. ¿Cuál es el dominio natural para esta función?

40. Sea $A(c)$ el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo por el eje y, por abajo por el eje x y por la derecha por la recta $x = c$. Tal función se conoce como **función de acumulación**. (Véase la figura 13.) Determine

(a) $A(1)$ (b) $A(2)$

(c) $A(0)$ (d) $A(c)$

(e) Esboce la gráfica de $A(c)$.

(f) ¿Cuáles son el dominio y el rango de A?

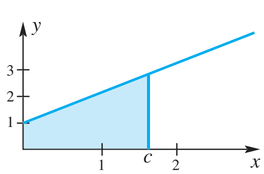


Figura 13

41. Sea $B(c)$ el área de la región acotada por arriba por la gráfica de la curva $y = x(1 - x)$, por abajo por el eje x, y por la derecha por la recta $x = c$. El dominio de B es el intervalo $[0, 1]$. (Véase la figura 14.) Dado que $B(1) = \frac{1}{6}$.

(a) Determine $B(0)$ (b) Determine $B\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) Haga una gráfica de $B(c)$, como mejor pueda.

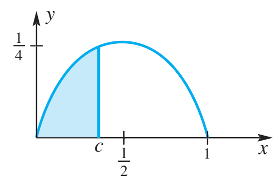


Figura 14

42. ¿Cuál de las siguientes funciones satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos los números reales x y y?

(a) $f(t) = 2t$ (b) $f(t) = t^2$

(c) $f(t) = 2t + 1$ (d) $f(t) = -3t$

43. Sea $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para toda x y y. Demuestre que existe un número m, tal que $f(t) = mt$ para todos los números racionales t. *Sugerencia:* primero decida cuánto tiene que valer m. Luego proceda por pasos, iniciando con $f(0) = 0$, $f(p) = mp$ para un número natural p; $f(1/p) = m/p$, etcétera.

44. Un diamante de beisbol es un cuadrado con lados de 90 pies. Un jugador, después de conectar un cuadrangular, corrió alrededor del diamante a una velocidad de 10 pies por segundo. Sea s la distancia del jugador al *home* después de t segundos.

(a) Exprese s como una función de t por medio de una fórmula con cuatro partes.

(b) Exprese s como una función de t por medio de una fórmula con tres partes.

GC *Para utilizar la tecnología de manera eficiente, usted necesita descubrir sus capacidades, fortalezas y debilidades. Le pedimos que practique la graficación de funciones de varios tipos utilizando su propio paquete de cómputo o su calculadora. Los problemas del 45 al 50 están diseñados con este propósito.*

45. Sea $f(x) = (x^3 + 3x - 5)/(x^2 + 4)$.

(a) Evalúe $f(1.38)$ y $f(4.12)$.

(b) Para esta función, construya una tabla de valores correspondiente a $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$.

46. Siga las instrucciones del problema 45 para $f(x) = (\operatorname{sen}^2 x - 3 \tan x)/\cos x$.

47. Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 8$ en el dominio $[-2, 5]$.

(a) Determine el rango de f.

(b) En este dominio, ¿dónde $f(x) \geq 0$?

48. Superponga la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 8x - 1$ con dominio $[-2, 5]$ sobre la gráfica de $f(x)$ del problema 47.

(a) Estime los valores de x donde $f(x) = g(x)$.

(b) En $[-2, 5]$, ¿dónde $f(x) \geq g(x)$?

(c) En $[-2, 5]$, estime el valor más grande de $|f(x) - g(x)|$.

49. Grafique $f(x) = (3x - 4)/(x^2 + x - 6)$ en el dominio $[-6, 6]$.

(a) Determine las intersecciones con el eje x y con el eje y.

(b) Determine el rango de f para el dominio dado.

(c) Determine las asíntotas verticales de la gráfica.

(d) Determine la asíntota horizontal para la gráfica, cuando el dominio se amplía a todo el dominio natural.

50. Siga las instrucciones del problema 49 para la función $g(x) = (3x^2 - 4)/(x^2 + x - 6)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** dominio, rango **2.** $12u^2$; $3(x+h)^2 = 3x^2 + 6xh + 3h^2$ **3.** asíntota **4.** par; impar; eje y; origen.

0.6 Operaciones con funciones

Al igual que dos números a y b pueden sumarse para producir un nuevo número $a + b$, también dos funciones f y g pueden sumarse para producir una nueva función $f + g$. Ésta es sólo una de las diferentes operaciones sobre funciones que describiremos en esta sección.

Sumas, diferencias, productos, cocientes y potencias Considere las funciones f y g con las fórmulas

$$f(x) = \frac{x-3}{2}, \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Podemos construir una nueva función $f + g$ al asignar a x el valor $f(x) + g(x) = (x - 3)/2 + \sqrt{x}$; esto es,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$$

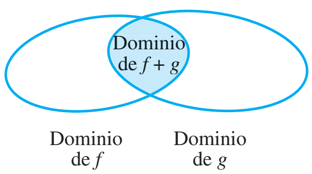


Figura 1

Por supuesto, debemos tener un poco de cuidado con respecto a los dominios. Claramente, x debe ser un número en el que tanto f como g funcionen. En otras palabras, el dominio de $f + g$ es la intersección (parte común) de los dominios de f y g (véase la figura 1).

Las funciones $f - g$, $f \cdot g$ y f/g se introducen de una manera completamente análoga. Suponiendo que f y g tienen sus dominios naturales, entonces:

Fórmula	Dominio
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-3}{2} - \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-3}{2}\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$

Hemos excluido al 0 del dominio de f/g para evitar la división entre cero.

También podemos elevar una función a una potencia. Con f^n representamos la función que a cada x asigna el valor $[f(x)]^n$. Así,

$$g^3(x) = [g(x)]^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3 = x^{3/2}$$

Existe una excepción en la convención anterior sobre exponentes; a saber, cuando $n = -1$. Reservamos el símbolo f^{-1} para la función inversa que se estudiará en la sección 6.2. Por lo tanto, f^{-1} no significa $1/f$.

EJEMPLO 1 Sean $F(x) = \sqrt[4]{x+1}$ y $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$, con dominios naturales respectivos $[-1, \infty)$ y $[-3, 3]$. Determine fórmulas para $F + G$, $F - G$, $F \cdot G$, F/G y F^5 y proporcione sus dominios naturales.

SOLUCIÓN

Fórmula	Dominio
$(F+G)(x) = F(x) + G(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F-G)(x) = F(x) - G(x) = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F\cdot G)(x) = F(x)\cdot G(x) = \sqrt[4]{x+1}\sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$\left(\dfrac{F}{G}\right)(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}$	$[-1, 3)$
$F^5(x) = [F(x)]^5 = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^5 = (x+1)^{5/4}$	$[-1, \infty)$ ■

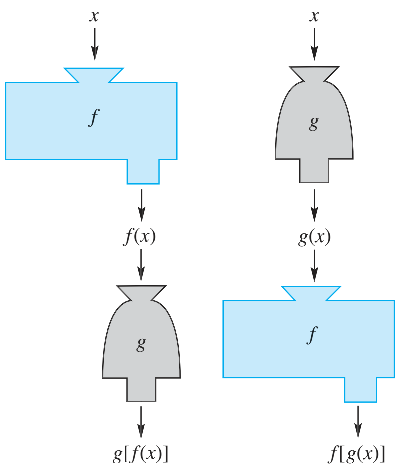


Figura 2

Composición de funciones Al principio, le pedimos que pensase en una función como una máquina. Que recibe x como entrada, trabaja sobre x y produce $f(x)$ como salida. Con frecuencia, dos máquinas se ponen una tras otra para producir una máquina más compleja; del mismo modo, dos funciones f y g (véase la figura 2). Si f actúa sobre x para producir $f(x)$ y luego g actúa sobre $f(x)$ para producir $g(f(x))$, decimos que hemos *compuesto* g con f. La función resultante, llamada **composición** de g con f, se denota con $g \circ f$. Así,

$$\boxed{(g\circ f)(x) = g(f(x))}$$

En nuestros ejemplos anteriores teníamos $f(x) = (x-3)/2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Podemos componer estas funciones de dos maneras:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Enseguida notamos que $g\circ f$ no es igual a $f\circ g$. Por lo tanto, decimos que la composición de funciones no es conmutativa.

Debemos tener cuidado al describir el dominio de una función compuesta. El dominio de $g\circ f$ es igual al conjunto de aquellos valores de x que satisfacen las siguientes propiedades:

1. x está en el dominio de f.
2. $f(x)$ está en el dominio de g.

En otras palabras, x debe ser una entrada válida para f y $f(x)$ debe ser una entrada válida para g. En nuestro ejemplo, el valor $x = 2$ está en el dominio de f, pero no está en el dominio de $g\circ f$ porque esto llevaría a la raíz cuadrada de un número negativo.

$$g(f(2)) = g((2-3)/2) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-\frac{1}{2}}$$

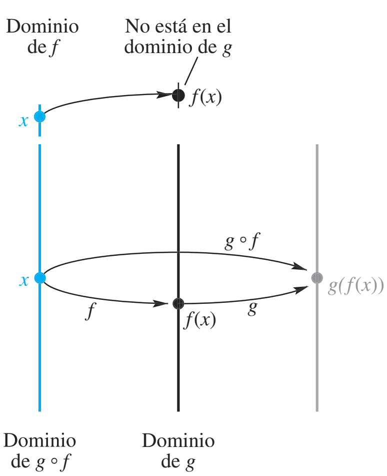


Figura 3

El dominio de $g\circ f$ es el intervalo $[3, \infty)$ ya que $f(x)$ es no negativa en este intervalo, y la entrada para g debe ser no negativa. El dominio para $f\circ g$ es el intervalo $[0, \infty)$ (¿por qué?), así vemos que los dominios de $g\circ f$ y $f\circ g$ pueden ser diferentes. La figura 3 muestra cómo el dominio de $g\circ f$ excluye aquellos valores de x para los cuales $f(x)$ no está en el dominio de g.

EJEMPLO 2 Sean $f(x) = 6x/(x^2-9)$ y $g(x) = \sqrt{3x}$, con sus dominios naturales. Primero, determine $(g\circ f)(12)$; luego $(f\circ g)(x)$ y proporcione su dominio.

SOLUCIÓN

$$(f\circ g)(12) = f(g(12)) = f\left(\sqrt{36}\right) = f(6) = \frac{6\cdot 6}{6^2-9} = \frac{4}{3}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{3x}\right) = \frac{6\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2 - 9}$$

La expresión $\sqrt{3x}$ aparece tanto en el numerador como en el denominador. Cualquier número negativo para x conduce a la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto, todos los números negativos deben excluirse del dominio de $f \circ g$. Para $x \geq 0$, tenemos $\left(\sqrt{3x}\right)^2 = 3x$, permitiéndonos escribir

$$(f \circ g)(x) = \frac{6\sqrt{3x}}{3x - 9} = \frac{2\sqrt{3x}}{x - 3}$$

También debemos excluir $x = 3$ del dominio de $f \circ g$ porque $g(3)$ no está en el dominio de f. (Causaría la división entre cero.) Así, el dominio de $f \circ g$ es $[0, 3) \cup (3, \infty)$. ■

En cálculo, con frecuencia necesitamos tomar una función dada y escribirla como la composición de dos funciones más simples. Usualmente, esto puede hacerse de varias formas. Por ejemplo, $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ puede escribirse como

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2 + 4$$

o como

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \sqrt{x + 4} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2$$

(Usted debe verificar que las dos composiciones dan $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ con dominio $(-\infty, \infty)$.) La descomposición $p(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$ se considera más sencilla y por lo regular se prefiere. Por lo tanto, podemos visualizar a $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ como la raíz cuadrada de una función de x. Esta manera de ver las funciones será importante en el capítulo 2.

EJEMPLO 3 Escriba la función $p(x) = (x + 2)^5$ como una función compuesta $g \circ f$.

SOLUCIÓN La manera más obvia de descomponer p es escribir

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = x^5 \quad \text{y} \quad f(x) = x + 2.$$

Así vemos a $p(x) = (x + 2)^5$ como la quinta potencia de una función de x. ■

Traslaciones La observación de cómo se construye una función a partir de otras más sencillas puede ser de gran ayuda al graficar. Podemos hacer esta pregunta: ¿cómo están relacionadas las gráficas de

$$y = f(x) \qquad y = f(x - 3) \qquad y = f(x) + 2 \qquad y = f(x - 3) + 2?$$

Como ejemplo, considere $f(x) = |x|$. Las cuatro gráficas correspondientes se muestran en la figura 4.

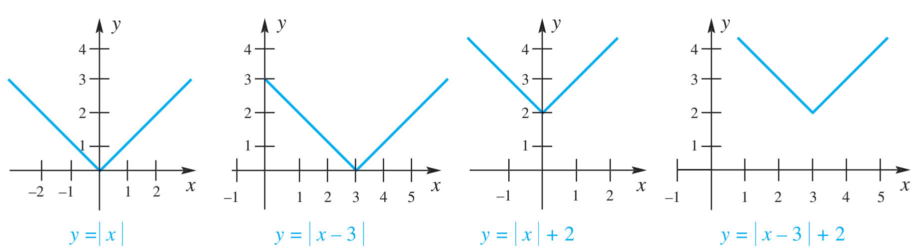
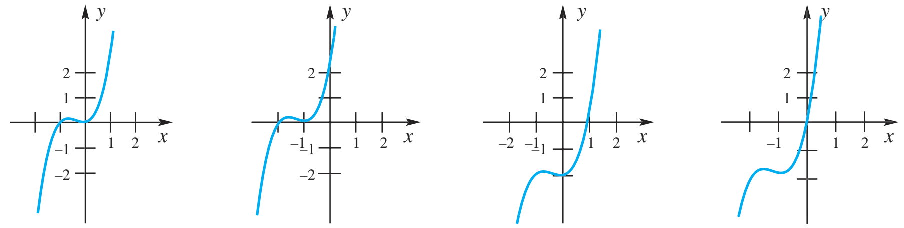


Figura 4

Observe que las cuatro gráficas tienen la misma forma; las últimas tres sólo son traslaciones de la primera. Al reemplazar x por $x - 3$ se traslada la gráfica 3 unidades hacia la derecha; al sumar 2 se traslada 2 unidades hacia arriba.

Lo que sucede con $f(x) = |x|$ es común. La figura 5 ofrece una ilustración para la función $f(x) = x^3 + x^2$.



$y = x^3 + x^2$
Gráfica
original

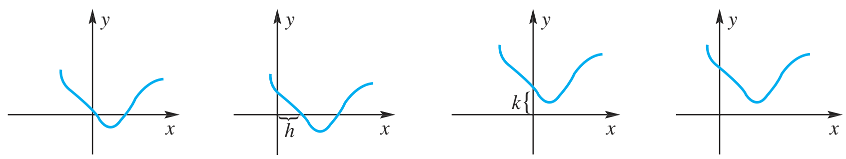
$y = (x + 1)^3 + (x + 1)^2$
Trasladada 1 unidad
hacia la izquierda

$y = x^3 + x^2 - 2$
Trasladada 2 unidades
hacia abajo

$y = (x + 1)^3 + (x + 1)^2 - 2$
Trasladada 1 unidad
hacia la izquierda y 2
unidades hacia abajo

Figura 5

Los mismos principios se aplican a la situación general. Se ilustran en la figura 6 con h y k positivas. Si $h < 0$, la traslación es hacia la izquierda, si $k < 0$ la traslación es hacia abajo.



$y = f(x)$
Gráfica
original

$y = f(x - h)$
Trasladada h unidades
hacia la derecha

$y = f(x) + k$
Trasladada k unidades
hacia arriba

$y = f(x - h) + k$
Trasladada h unidades
hacia la derecha y k
unidades hacia arriba

Figura 6

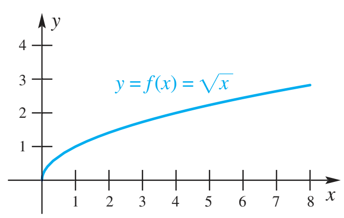


Figura 7

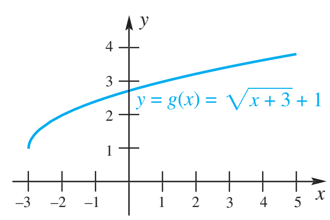


Figura 8

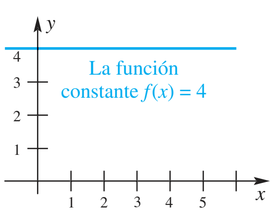


Figura 9

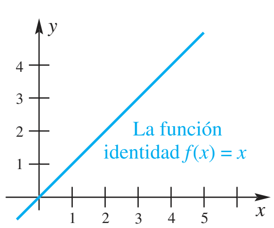


Figura 10

EJEMPLO 4 Bosqueje la gráfica de $g(x) = \sqrt{x + 3} + 1$ graficando primero $f(x) = \sqrt{x}$ y luego haciendo las traslaciones apropiadas.

SOLUCIÓN Por medio de la traslación de la gráfica de f (véase la figura 7) 3 unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba, obtenemos la gráfica de g (véase la figura 8). ■

Catálogo parcial de funciones Una función de la forma $f(x) = k$, donde k es una constante (número real), se denomina **función constante**. Su gráfica es una recta horizontal (véase la figura 9). La función $f(x) = x$ se denomina **función identidad**. Su gráfica es una recta que pasa por el origen con pendiente 1 (véase la figura 10). Con base en estas funciones sencillas, podemos construir muchas funciones importantes.

Cualquier función que pueda obtenerse a partir de las funciones constantes y la función identidad, mediante el uso de las operaciones de suma, diferencia y multiplicación, se denomina **función polinomial**. Esto equivale a decir que f es una función polinomial si es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde las *aes* son números reales y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, n es el **grado** de la función polinomial. En particular, $f(x) = ax + b$ es una función polinomial de primer grado, o **función lineal**, y $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función polinomial de segundo grado, o **función cuadrática**.

Los cocientes de funciones polinomiales se llaman funciones racionales. Así, f es una **función racional** si es de la forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

El dominio de una función racional consiste en aquellos números reales para los cuales el denominador es distinto de cero.

Una **función algebraica explícita** es aquella que puede obtenerse a partir de las funciones constantes y la función identidad por medio de las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces. Algunos ejemplos son

$$f(x) = 3x^{2/5} = 3\sqrt[5]{x^2} \qquad g(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Las funciones listadas hasta el momento, junto con las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponencial y logarítmicas (que se introducen más adelante) son la materia prima para cálculo.

Revisión de conceptos

1. Si $f(x) = x^2 + 1$, entonces $f^3(x) =$ _____.

2. El valor de la función compuesta $f \circ g$ en x está dada por $(f \circ g)(x) =$ _____.

3. Comparada con la gráfica de $y = f(x)$, la gráfica de $y = f(x+2)$ está trasladada _______ unidades hacia _______.

4. Una función racional se define como _____.

Conjunto de problemas 0.6

1. Para $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$, determine cada uno de los valores (si esto es posible).

(a) $(f + g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(0)$ (c) $(g/f)(3)$
(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ f)(-8)$

2. Para $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 2/(x + 3)$, determine cada uno de los valores.

(a) $(f - g)(2)$ (b) $(f/g)(1)$ (c) $g^2(3)$
(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ g)(3)$

3. Para $\Phi(u) = u^3 + 1$ y $\Psi(v) = 1/v$, determine cada uno de los valores.

(a) $(\Phi + \Psi)(t)$ (b) $(\Phi \circ \Psi)(r)$
(c) $(\Psi \circ \Phi)(r)$ (d) $\Phi^3(z)$
(e) $(\Phi - \Psi)(5t)$ (f) $((\Phi - \Psi) \circ \Psi)(t)$

4. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = 2/x$, determine fórmulas para lo siguiente y también sus dominios.

(a) $(f \cdot g)(x)$ (b) $f^4(x) + g^4(x)$
(c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(s) = \sqrt{s^2 - 4}$ y $g(w) = |1 + w|$, determine fórmulas para $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

6. Si $g(x) = x^2 + 1$, determine fórmulas para $g^3(x)$ y $(g \circ g \circ g)(x)$.

C **7.** Calcule $g(3.141)$, si $g(u) = \dfrac{\sqrt{u^3 + 2u}}{2 + u}$.

C **8.** Calcule $g(2.03)$ si $g(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^4}{1 - x + x^2}$.

C **9.** Calcule $[g^2(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(v) = |11 - 7v|$.

C **10.** Calcule $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(x) = 6x - 11$.

11. Determine f y g de modo que $F = g \circ f$. (Véase el ejemplo 3).

(a) $F(x) = \sqrt{x + 7}$ (b) $F(x) = (x^2 + x)^{15}$

12. Encuentre f y g tales que $p = f \circ g$.

(a) $p(x) = \dfrac{2}{(x^2 + x + 1)^3}$ (b) $p(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x}$

13. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de tres funciones, hágalo de dos maneras distintas.

14. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de cuatro funciones.

15. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 2} - 3$, haciendo primero la gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$ y luego trasladando ésta. (Véase el ejemplo 4).

16. Bosqueje la gráfica de $g(x) = |x + 3| - 4$; primero grafique $h(x) = |x|$ y luego trasládela.

17. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2 - 4$.

18. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $g(x) = (x + 1)^3 - 3$.

19. Bosqueje las gráficas de $f(x) = (x - 3)/2$ y $g(x) = \sqrt{x}$; utilice los mismos ejes coordenados. Luego trace $f + g$ al sumar las ordenadas y.

20. Siga las instrucciones del problema 19 para $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

21. Bosqueje la gráfica de $F(t) = \dfrac{|t| - t}{t}$.

22. Bosqueje la gráfica de $G(t) = t - [\![t]\!]$.

23. Establezca si cada una de las siguientes funciones es impar o par, o bien ninguna de las dos. Demuestre sus afirmaciones.

(a) La suma de dos funciones pares.

(b) La suma de dos funciones impares.

(c) El producto de dos funciones pares.

(d) El producto de dos funciones impares.

(e) El producto de una función par y una función impar.

24. Sea F cualquier función cuyo dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

(a) $F(x) - F(-x)$ es una función impar.

(b) $F(x) + F(-x)$ es una función par.

(c) F puede expresarse siempre como la suma de una función impar y una función par.

25. ¿Todo polinomio de grado par es una función par? ¿Todo polinomio de grado impar es una función impar? Explique.

26. Clasifique cada una de las siguientes como FP (función polinomial), FR (función racional pero no función polinomial) o ninguna de éstas.

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$ (b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$ (d) $f(x) = \pi x^3 - 3\pi$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3}}$

27. La relación entre el precio por unidad P (en centavos) para cierto producto y la demanda D (en miles de unidades) parece satisfacer

$$P = \sqrt{29 - 3D + D^2}$$

Por otra parte, la demanda se ha incrementado, durante los t años, desde 1970 de acuerdo a $D = 2 + \sqrt{t}$.

(a) Exprese P como una función de t.

(b) Evalúe P cuando $t = 15$.

28. Después de estar en los negocios durante t años, un fabricante de automóviles está produciendo $120 + 2t + 3t^2$ unidades por año. Los precios de venta en dólares por unidad han aumentado de acuerdo con la fórmula $6000 + 700t$. Escriba una fórmula para los ingresos anuales del fabricante $R(t)$ después de t años.

29. Al comenzar el mediodía, el aeroplano A vuela con rumbo norte a una velocidad de 400 millas por hora. Exactamente 1 hora más tarde, el aeroplano B vuela con rumbo este a 300 millas por hora. Despreciando la curvatura de la Tierra y suponiendo que los aeroplanos vuelan a la misma altitud, determine una fórmula para $D(t)$, la distancia entre los dos aeroplanos t horas, contadas a partir del mediodía. *Sugerencia:* serán dos fórmulas para $D(t)$, una si $0 \le t < 1$ y la otra si $t \ge 1$.

≈ C **30.** Determine la distancia entre los aeroplanos del problema 29 a las 2:30 p. m.

31. Sea $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$. Demuestre que $f(f(x)) = x$, siempre y cuando $a^2 + bc \ne 0$ y $x \ne a/c$.

32. Sea $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$. Demuestre que $f(f(f(x))) = x$, siempre y cuando $x \ne \pm 1$.

33. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. Determine y simplifique cada valor.

(a) $f(1/x)$ (b) $f(f(x))$ (c) $f(1/f(x))$

34. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$. Encuentre y simplifique.

(a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $f(f(x))$

35. Demuestre que la operación de composición de funciones es asociativa; es decir, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$.

36. Sean $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = 1/(1 - x)$, $f_5(x) = (x - 1)/x$ y $f_6(x) = x/(x - 1)$. Observe que $f_3(f_4(x)) = f_3(1/(1 - x)) = 1 - 1/(1 - x) = x/(x - 1) = f_6(x)$; esto es, $f_3 \circ f_4 = f_6$. De hecho, la composición de cualesquiera dos de estas funciones es otra de la lista. Llene la tabla de composiciones de la figura 11.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3				f_6		
f_4						
f_5						
f_6						

Figura 11

Después utilice esta tabla para determinar cada una de las siguientes. Con base en el problema 35, sabe que se cumple la ley asociativa.

(a) $f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3$ (b) $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6$

(c) F, si $F \circ f_6 = f_1$ (d) G, si $G \circ f_3 \circ f_6 = f_1$

(e) H si $f_2 \circ f_5 \circ H = f_5$

GC *En los problemas del 37 al 40, utilice una computadora o una calculadora graficadora.*

37. Sea $f(x) = x^2 - 3x$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(x - 0.5) - 0.6$ y $y = f(1.5x)$, todas sobre el dominio $[-2, 5]$.

38. Sea $f(x) = |x^3|$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(3x)$ y $y = f(3(x - 0.8))$, todas sobre el dominio $[-3, 3]$.

39. Sea $f(x) = 2\sqrt{x} - 2x + 0.25x^2$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(1.5x)$ y $y = f(x - 1) + 0.5$, todas en el dominio $[0, 5]$.

40. Sea $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(x - 2) + 0.6$, todas en el dominio $[-4, 4]$.

CAS **41.** Su sistema de álgebra computacional (CAS) puede permitir el uso de parámetros en la definición de funciones. En cada caso, dibuje la gráfica de $y = f(x)$ para los valores especificados del parámetro k; utilice los mismos ejes y $-5 \le x \le 5$.

(a) $f(x) = |kx|^{0.7}$ para $k = 1, 2, 0.5$ y 0.2.

(b) $f(x) = |x - k|^{0.7}$ para $k = 0, 2, -0.5$ y -3.

(c) $f(x) = |x|^k$ para $k = 0.4, 0.7, 1$ y 1.7.

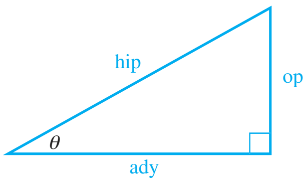
CAS **42.** Utilizando los mismos ejes, dibuje la gráfica de $f(x) = |k(x - c)|^n$ para la siguiente elección de parámetros.

(a) $c = -1, k = 1.4, n = 0.7$ (b) $c = 2, k = 1.4, n = 1$

(c) $c = 0, k = 0.9, n = 0.6$

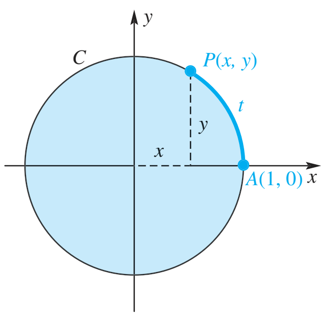
Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(x^2 + 1)^3$ **2.** $f(g(x))$ **3.** 2; la izquierda **4.** un cociente de dos funciones polinomiales.

0.7 Funciones trigonométricas



$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

Figura 1



Círculo unitario

Figura 2

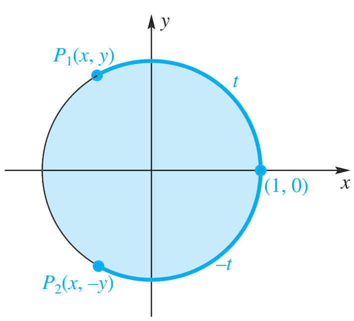


Figura 3

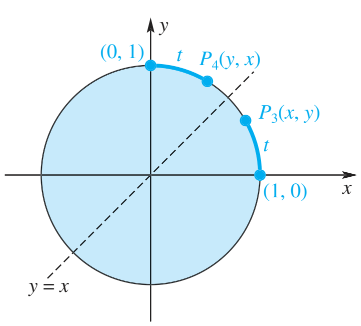


Figura 4

Probablemente ha visto la definición de las funciones trigonométricas, con base en triángulos rectángulos. La figura 1 resume las definiciones de las funciones seno, coseno y tangente. Debe revisar con cuidado la figura 1, ya que estos conceptos son necesarios para muchas aplicaciones posteriores en este texto.

Más generalmente, definimos las funciones trigonométricas con base en el círculo unitario. El círculo unitario, que denotamos con C, es el círculo con radio 1 y centro en el origen, cuya circunferencia tiene ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea A el punto $(1, 0)$ y sea t un número positivo. Existe un solo punto P en el círculo C tal que la distancia, medida en *sentido contrario de las manecillas del reloj* alrededor del arco AP, es igual a t. (Véase la figura 2). Recuerde que la circunferencia de un círculo con radio r es $2\pi r$, de modo que la circunferencia de C es 2π. Por lo tanto, si $t = \pi$, entonces el punto P está exactamente a la mitad del camino alrededor del círculo iniciando en el punto A; en este caso, P es el punto $(-1, 0)$. Si $t = 3\pi/2$, entonces P es el punto $(0, -1)$ y si $t = 2\pi$, entonces P es el punto A. Si $t > 2\pi$, entonces le tomará más de un circuito completo del círculo para trazar el arco AP.

Cuando $t < 0$, trazamos el círculo en el *sentido de las manecillas del reloj*. Habrá un solo punto P en el círculo C tal que la longitud del arco, medida en dirección de las manecillas del reloj a partir de A, sea t. Así, para cada número real t, podemos asociar un único punto $P(x, y)$ en el círculo unitario. Esto nos permite construir las definiciones clave de las funciones seno y coseno. Las funciones seno y coseno se escriben como sen y cos, en lugar de una sola letra como f o g. Por lo regular, se omiten los paréntesis alrededor de la variable independiente, a menos que exista alguna ambigüedad.

Definición Funciones seno y coseno

Sea t un número real que determina el punto $P(x, y)$, como se explicó anteriormente. Entonces

$$\text{sen}\, t = y \qquad \text{y} \qquad \cos t = x$$

Propiedades básicas del seno y del coseno Varios hechos son casi inmediatos a partir de las definiciones dadas anteriormente. Primero, como t puede ser cualquier número real, el dominio de las funciones seno y coseno es $(-\infty, \infty)$ Segundo, x y y siempre están entre -1 y 1. Así, el rango para las funciones seno y coseno es el intervalo $[-1, 1]$.

Puesto que el círculo unitario tiene 2π de circunferencia, los valores de t y $t + 2\pi$ determinan el *mismo* punto $P(x, y)$. Por lo tanto,

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}\, t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

(Observe que los paréntesis son necesarios para dejar claro que queremos $\text{sen}(t + 2\pi)$ en lugar de $(\text{sen}\, t) + 2\pi$. La expresión $\text{sen}\, t + 2\pi$ sería ambigua).

Los puntos P_1 y P_2 que corresponden a t y $-t$, respectivamente, son simétricos con respecto al eje x (véase la figura 3). Por lo tanto, las abscisas para P_1 y P_2 son las mismas y las ordenadas y sólo difieren en el signo. En consecuencia,

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen}\, t \qquad \text{y} \qquad \cos(-t) = \cos t$$

En otras palabras, seno es una función impar y coseno es una función par.

Los puntos P_3 y P_4 correspondientes a t y $\pi/2 - t$, respectivamente, son simétricos con respecto a la recta $y = x$ y, por lo tanto, tenemos sus coordenadas intercambiadas (véase la figura 4). Esto significa que

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \qquad \text{y} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \text{sen}\, t$$

Por último, mencionamos una identidad importante que relaciona las funciones seno y coseno:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

para todo número real t. Esta identidad se deriva del hecho de que el punto (x, y) está en la circunferencia del círculo unitario, de aquí que x y y deben satisfacer $x^2 + y^2 = 1$.

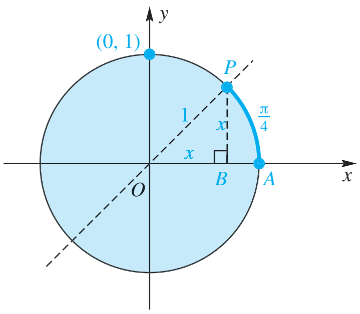


Figura 5

Gráficas de seno y coseno Para graficar $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$, seguimos nuestro procedimiento usual de construir una tabla de valores, trazar los puntos correspondientes y unir estos puntos con una curva suave. Sin embargo, hasta ahora sólo conocemos los valores de seno y coseno para pocos valores de t. Otros valores pueden determinarse a partir de argumentos geométricos. Por ejemplo, si $t = \pi/4$, entonces t determina el punto medio del camino, si se recorre el círculo unitario en sentido contrario a las manecillas del reloj, entre los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Por simetría, x y y estarán en la recta $y = x$, de modo que $y = \operatorname{sen} t$ y $x = \cos t$ serán iguales. Así, los dos catetos del triángulo rectángulo OBP son iguales, y la hipotenusa es 1 (véase la figura 5). Puede aplicarse el Teorema de Pitágoras para obtener:

$$1 = x^2 + x^2 = \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}$$

De esto concluimos que $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. De manera análoga, $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Podemos determinar sen t y cos t para otros valores de t. Algunos de éstos se muestran en la tabla que aparece en el margen. Utilizando estos resultados, junto con varios resultados de una calculadora (en modo de radianes), obtenemos las gráficas que se muestran en la figura 6.

t	sen t	cos t
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
π	0	-1

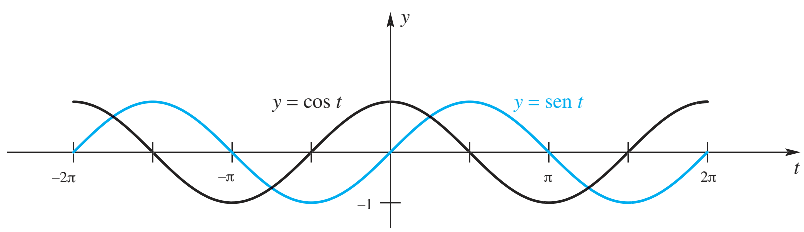


Figura 6

Con respecto a estas gráficas, cuatro cosas son notables:

1. Tanto sen t como cos t tienen como rango de -1 a 1.
2. Ambas gráficas se repiten en intervalos adyacentes de longitud 2π.
3. La gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ es simétrica respecto al origen, y $y = \cos t$ es simétrica con respecto al eje y. (Por lo tanto, la función seno es impar y la función coseno es par).
4. La gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ es la misma que la de $y = \cos t$, pero trasladada $\pi/2$ unidades hacia la derecha.

El siguiente ejemplo trata con funciones de la forma $\operatorname{sen}(at)$ o $\cos(at)$, que con frecuencia aparecen en las aplicaciones.

EJEMPLO 1 Bosqueje las gráficas de

(a) $y = \operatorname{sen}(2\pi t)$ (b) $y = \cos(2t)$

SOLUCIÓN

(a) Cuando t va de 0 a 1, el argumento $2\pi t$ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, la gráfica de esta función se repetirá en intervalos adyacentes de longitud 1. Con base en las entradas de la siguiente tabla, podemos bosquejar una gráfica de $y = \operatorname{sen}(2\pi t)$.

t	$\text{sen}(2\pi t)$	t	$\text{sen}(2\pi t)$
0	$\text{sen}(2\pi \cdot 0) = 0$	$\frac{5}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{5}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{3}{4}\right) = -1$
$\frac{1}{4}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 1$	$\frac{7}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{7}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\text{sen}(2\pi \cdot 1) = 0$
$\frac{1}{2}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$	$\frac{9}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{9}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La figura 7 muestra un bosquejo de la gráfica de $y = \text{sen}(2\pi t)$.

(b) Conforme t varía de 0 a π, el argumento $2t$ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, la gráfica de $y = \cos(2t)$ se repetirá en intervalos adyacentes de longitud π. Una vez que construimos una tabla podemos bosquejar una gráfica de $y = \cos(2t)$. La figura 8 muestra la gráfica de $y = \cos(2t)$.

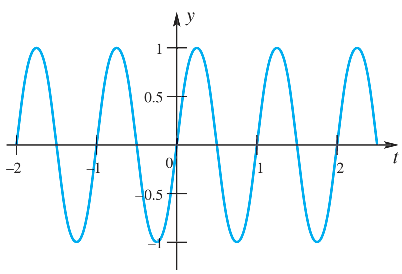


Figura 7

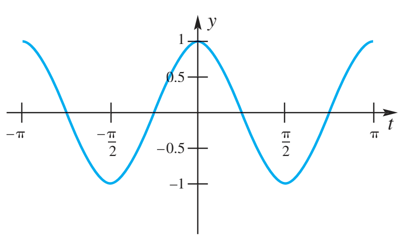


Figura 8

t	$\cos(2t)$	t	$\cos(2t)$
0	$\cos(2 \cdot 0) = 1$	$\frac{5\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0$	$\frac{7\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	π	$\cos(2 \cdot \pi) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -1$	$\frac{9\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{9\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

■

Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas Una función f es **periódica** si existe un número p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

para todos los números reales x en el dominio de f. El número positivo p más pequeño de tales números se denomina **periodo** de f. La función seno es periódica porque $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}\, x$ para toda x. También es cierto que

$$\text{sen}(x + 4\pi) = \text{sen}(x - 2\pi) = \text{sen}(x + 12\pi) = \text{sen}\, x$$

para toda x. Por lo tanto, 4π, -2π y 12π son números p con la propiedad de que $\text{sen}(x + p) = \text{sen}\, x$. El periodo se define como el número positivo más pequeño p. Para la función seno, el positivo más pequeño p con la propiedad de que $\text{sen}(x + p) = \text{sen}\, x$ es $p = 2\pi$. En consecuencia, decimos que la función seno es periódica, con periodo 2π. La función coseno también es periódica, con periodo 2π.

La función $\text{sen}(at)$, con $a > 0$, $2\pi/a$ ya que

$$\text{sen}\left[a\left(t + \frac{2\pi}{a}\right)\right] = \text{sen}[at + 2\pi] = \text{sen}(at)$$

El periodo de la función $\cos(at)$ también es $2\pi/a$.

EJEMPLO 2 ¿Cuáles son los periodos de las funciones siguientes?

(a) $\operatorname{sen}(2\pi t)$ (b) $\cos(2t)$ (c) $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$

SOLUCIÓN

(a) Como la función $\operatorname{sen}(2\pi t)$ es de la forma $\operatorname{sen}(at)$ con $a = 2\pi$, su periodo es $p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

(b) La función $\cos(2t)$ es de la forma $\cos(at)$ con $a = 2$. Por lo tanto, el periodo de $\cos(2t)$ es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(c) La función $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ tiene periodo $p = \frac{2\pi}{2\pi/12} = 12$. ■

Si la función periódica f alcanza un máximo y un mínimo, definimos la **amplitud** A como la mitad de la distancia vertical entre el punto más bajo y el punto más alto de la gráfica.

EJEMPLO 3 Determine la amplitud de las siguientes funciones periódicas.

(a) $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ (b) $3 \cos(2t)$

(c) $50 + 21 \operatorname{sen}(2\pi t/12 + 3)$

SOLUCIÓN

(a) Como el rango de la función $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ es $[-1, 1]$, su amplitud es $A = 1$.

(b) La función $3 \cos(2t)$ tomará valores de -3 (lo cual ocurre cuando $t = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$) a 3 (lo cual se da cuando $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$). Por lo tanto, la amplitud es $A = 3$.

(c) La función $21 \operatorname{sen}(2\pi t/12 + 3)$ toma valores que van de -21 a 21. Por lo tanto, $50 + 21 \operatorname{sen}(12\pi t/12 + 3)$ toma valores de $50 - 21 = 29$ a $50 + 21 = 71$. Por lo tanto, la amplitud es 21. ■

En general, para $a > 0$ y $A > 0$,

$$C + A \operatorname{sen}(a(t+b)) \text{ y } C + A \cos(a(t+b)) \text{ tienen periodo } \frac{2\pi}{a} \text{ y amplitud } A.$$

Las funciones trigonométricas se pueden usar para modelar diferentes fenómenos físicos, incluyendo niveles diarios de la marea y temperaturas anuales.

EJEMPLO 4 La temperatura alta normal para San Luis, Missouri, varía desde 37°F para el 15 de enero hasta 89°F para el 15 de julio. La temperatura alta normal sigue aproximadamente una curva sinusoidal.

(a) Determine valores de C, A, a y b tales que

$$T(t) = C + A \operatorname{sen}(a(t+b))$$

donde t, expresada en meses desde el 1 de enero, es un modelo razonable para la temperatura alta normal.

(b) Utilice este modelo para aproximar la temperatura alta normal para el 15 de mayo.

SOLUCIÓN

(a) La función pedida debe tener periodo $t = 12$, ya que las estaciones se repiten cada 12 meses. Así, $\frac{2\pi}{a} = 12$, de modo que tenemos $a = \frac{2\pi}{12}$. La amplitud es la mitad de la diferencia entre los puntos más alto y más bajo; en este caso $A = \frac{1}{2}(89 - 37) = 26$.

El valor de C es igual a la mitad de las temperaturas baja y alta, de modo que $C = \frac{1}{2}(89 + 37) = 63$. Por lo tanto, la función $T(t)$ será de la forma

$$T(t) = 63 + 26\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{12}(t + b)\right)$$

La única constante que queda por determinar es b. La temperatura normal alta inferior es 37, que ocurre el 15 de enero, aproximadamente a mediados de enero. Así, nuestra función debe satisfacer $T(1/2) = 37$, y la función debe alcanzar su mínimo de 37 cuando $t = 1/2$. La figura 9 resume la información que tenemos hasta el momento. La función $63 + 26\,\mathrm{sen}(2\pi t/12)$ alcanza su mínimo cuando $2\pi t/12 = -\pi/2$, esto es, cuando $t = -3$. Por lo tanto, debemos trasladar hacia la derecha $1/2 - (-3) = 7/2$ unidades, la curva definida por $y = 63 + 26\,\mathrm{sen}(2\pi t/12)$. En la sección 0.6 mostramos que reemplazar x por $x - c$ traslada la gráfica de $y = f(x)$ hacia la derecha c unidades. Así, para trasladar la gráfica de $y = 63 + 26\,\mathrm{sen}(2\pi t/12)$ hacia la derecha 7/2 unidades, debemos reemplazar t con $t - 7/2$. Por lo tanto,

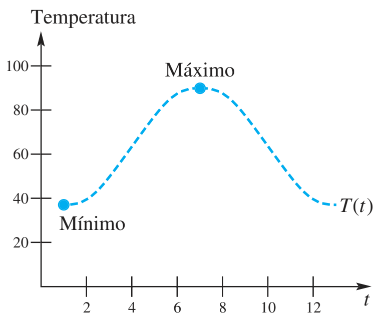


Figura 9

$$T(t) = 63 + 26\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\left(t - \frac{7}{2}\right)\right)$$

La figura 10 muestra una gráfica de la temperatura alta normal T como una función de t, donde t está dada en meses.

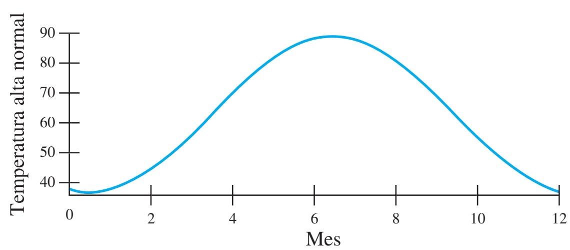


Figura 10

(b) Para estimar la temperatura alta normal el 15 de mayo, sustituimos $t = 4.5$ (ya que la mitad de mayo está a cuatro y medio meses del inicio del año) y obtenemos

$$T(4.5) = 63 + 26\,\mathrm{sen}(2\pi(4.5 - 3.5)/12) = 76$$

La temperatura alta normal para San Luis el 15 de mayo realmente es de 75°F. De este modo, nuestro modelo sobreestima por 1°, lo cual es sorprendentemente preciso considerando la poca información que fue dada. ■

Modelos y modelación
Es importante tener presente que todos los modelos, como éste, son simplificaciones de la realidad. (Por esta razón se denominan *modelos*). Aunque tales modelos son inherentemente simplificaciones de la realidad, muchos de ellos son útiles para realizar pronósticos.

Otras cuatro funciones trigonométricas Podríamos valernos sólo de las funciones seno y coseno, pero es conveniente introducir cuatro funciones trigonométricas más: tangente, cotangente, secante y cosecante.

$$\tan t = \frac{\mathrm{sen}\, t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\mathrm{sen}\, t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\mathrm{sen}\, t}$$

Lo que sabemos de seno y coseno nos proporcionará, de forma automática, conocimiento acerca de estas cuatro nuevas funciones.

EJEMPLO 5 Demuestre que la tangente es una función impar.

SOLUCIÓN

$$\tan(-t) = \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t \qquad \blacksquare$$

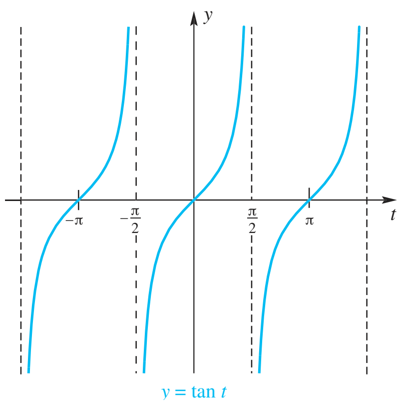


Figura 11

EJEMPLO 6 Verifique que las siguientes son identidades.

$$\boxed{1 + \tan^2 t = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t}$$

SOLUCIÓN

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} = \csc^2 t \qquad \blacksquare$$

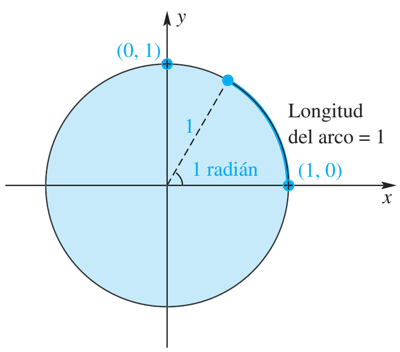


Figura 12

Cuando estudiamos la función tangente (figura 11) nos encontramos con dos pequeñas sorpresas. Primera, notamos que hay asíntotas verticales en $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$, etcétera. Debimos haber anticipado esto, ya que $\cos t = 0$ en estos valores de t, lo cual significa que $(\operatorname{sen} t)/(\cos t)$ implicaría una división entre cero. Segunda, parece que la tangente es periódica (lo cual esperábamos), pero con periodo π (que podríamos no haber esperado). Usted verá la razón analítica para esto en el problema 33.

Relación con la trigonometría del ángulo

Por lo común, los ángulos se miden en grados o en radianes. Por definición, un radián es el ángulo que corresponde a un arco de longitud 1 en un círculo unitario. Véase la figura 12. El ángulo que corresponde a una vuelta completa mide 360°, pero sólo 2π radianes. De manera equivalente, un ángulo llano (de lados colineales)medirá 180° o π radianes, un hecho importante para recordar.

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ radianes} \approx 3.1415927 \text{ radianes}}$$

Grados	Radianes
0	0
30	π/6
45	π/4
60	π/3
90	π/2
120	2π/3
135	3π/4
150	5π/6
180	π
360	2π

Figura 13

Esto conduce a los resultados

$$1 \text{ radián} \approx 57.29578^\circ \qquad 1^\circ \approx 0.0174533 \text{ radián}$$

La figura 13 muestra algunas otras conversiones comunes entre grados y radianes.

La división de una vuelta en 360 partes es muy arbitraria (debida a los antiguos babilonios, a quienes les agradaban los múltiplos de 60). La división en 2π partes es más fundamental y yace en el uso casi universal de la medida radián en cálculo. En particular, observe que la longitud s del arco que corta un círculo de radio r por medio de un ángulo central de t radianes satisface (véase la figura 14)

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{t}{2\pi}$$

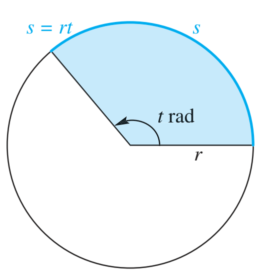


Figura 14

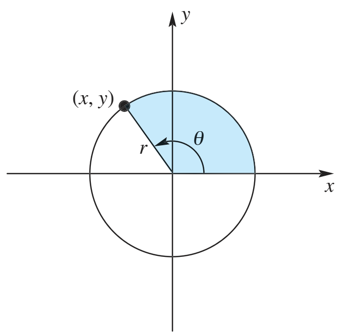
Esto es, la fracción de la circunferencia total $2\pi r$ correspondiente a un ángulo t es la misma fracción del círculo unitario que corresponde al mismo ángulo t. Esto implica que $s = rt$.

Cuando $r = 1$, esto da $s = t$, *lo cual* significa que *la longitud del arco en el círculo unitario cortado por un ángulo central de t radianes es t*. Esto es correcto incluso si t es negativa, con tal que interpretemos la longitud como negativa cuando se mide en dirección de las manecillas del reloj.

EJEMPLO 7 Determine la distancia recorrida por una bicicleta, cuyas ruedas tienen un radio de 30 centímetros, cuando éstas han girado 100 revoluciones.

Otra vista

Hemos tenido al círculo unitario como base de nuestro estudio de trigonometría. También podríamos utilizar un círculo de radio r.



Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

SOLUCIÓN Utilizamos el hecho de que $s = rt$, reconociendo que 100 revoluciones corresponden a $100\cdot(2\pi)$ radianes.

$$s = (30)(100)(2\pi) = 6000\pi \approx 18{,}849.6 \text{ centímetros} \approx 188.5 \text{ metros} \qquad \blacksquare$$

Ahora podemos hacer la conexión entre la trigonometría del ángulo y la trigonometría del círculo unitario. Si θ es un ángulo medido en k radianes, es decir, si θ es un ángulo que corta un arco de longitud t del círculo unitario, entonces

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos\theta = \cos t}$$

En cálculo, cuando encontramos un ángulo medido en grados, casi siempre lo cambiamos a radianes antes de realizar cualquier cálculo. Por ejemplo,

$$\boxed{\operatorname{sen} 31.6^\circ = \operatorname{sen}\left(31.6\cdot\frac{\pi}{180}\text{radián}\right) \approx \operatorname{sen} 0.552}$$

Lista de identidades importantes

No gastaremos espacio en verificar todas las identidades siguientes. Simplemente aseguraremos su validez y sugerimos que la mayoría de ellas será necesaria en alguna parte de este texto.

Identidades trigonométricas Lo siguiente es cierto para toda x y toda y, siempre que ambos lados estén definidos para las x y y seleccionadas.

Identidades par-impar

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de las cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades para la suma de ángulos

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Identidades del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Identidades del medio ángulo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Identidades aditivas

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Identidades multiplicativas

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\tfrac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$
$$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

Revisión de conceptos

1. El dominio natural de la función seno es _______; su rango es _______.

2. El periodo de la función coseno es _______; el periodo de la función seno es _______; el periodo de la función tangente es _______.

3. Como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, la función seno es _______ y como $\cos(-x) = \cos x$, la función coseno es _______.

4. Si $(-4, 3)$ está en el lado terminal de un ángulo θ cuyo vértice está en el origen y su lado inicial está a lo largo de la parte positiva del eje x, entonces $\cos\theta =$ _______.

Conjunto de problemas 0.7

1. Convierta las siguientes medidas en grados a radianes (deje π en su respuesta)

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $-60°$
(d) $240°$ (e) $-370°$ (f) $10°$

2. Convierta las siguientes medidas en radianes a grados

(a) $\frac{7}{6}\pi$ (b) $\frac{3}{4}\pi$ (c) $-\frac{1}{3}\pi$
(d) $\frac{4}{3}\pi$ (e) $-\frac{35}{18}\pi$ (f) $\frac{3}{18}\pi$

$\boxed{\text{C}}$ **3.** Convierta las siguientes medidas en grados a radianes $(1° = \pi/180 \approx 1.7453 \times 10^{-2}$ radianes$)$.

(a) $33.3°$ (b) $46°$ (c) $-66.6°$
(d) $240.11°$ (e) $-369°$ (f) $11°$

$\boxed{\text{C}}$ **4.** Convierta las siguientes medidas en radianes a grados $(1$ radián $= 180/\pi \approx 57.296$ grados$)$.

(a) 3.141 (b) 6.28 (c) 5.00
(d) 0.001 (e) -0.1 (f) 36.0

$\boxed{\text{C}}$ **5.** Calcule (asegúrese de que su calculadora está en modo de radianes o de grados, según sea necesario).

(a) $\dfrac{56.4 \tan 34.2°}{\operatorname{sen} 34.1°}$ (b) $\dfrac{5.34 \tan 21.3°}{\operatorname{sen} 3.1° + \cot 23.5°}$

(c) $\tan 0.452$ (d) $\operatorname{sen}(-0.361)$

$\boxed{\text{C}}$ **6.** Calcule

(a) $\dfrac{234.1 \operatorname{sen} 1.56}{\cos 0.34}$ (b) $\operatorname{sen}^2 2.51 + \sqrt{\cos 0.51}$

$\boxed{\text{C}}$ **7.** Calcule.

(a) $\dfrac{56.3 \tan 34.2°}{\operatorname{sen} 56.1°}$ (b) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} 35°}{\operatorname{sen} 26° + \cos 26°}\right)^3$

8. Verifique los valores de sen t y cos t de la tabla utilizada para construir la figura 6.

9. Sin utilizar calculadora, evalúe.

(a) $\tan\dfrac{\pi}{6}$ (b) $\sec\pi$ (c) $\sec\dfrac{3\pi}{4}$

(d) $\csc\dfrac{\pi}{2}$ (e) $\cot\dfrac{\pi}{4}$ (f) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

10. Evalúe sin utilizar calculadora.

(a) $\tan\dfrac{\pi}{3}$ (b) $\sec\dfrac{\pi}{3}$ (c) $\cot\dfrac{\pi}{3}$

(d) $\csc\dfrac{\pi}{4}$ (e) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ (f) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

11. Verifique que las siguientes son identidades (véase el ejemplo 6).

(a) $(1 + \operatorname{sen} z)(1 - \operatorname{sen} z) = \dfrac{1}{\sec^2 z}$

(b) $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

(c) $\sec t - \operatorname{sen} t \tan t = \cos t$

(d) $\dfrac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \operatorname{sen}^2 t$

12. Verifique que las siguientes son identidades (véase el ejemplo 6).

(a) $\operatorname{sen}^2 v + \dfrac{1}{\sec^2 v} = 1$

(b) $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$. *Sugerencia:* utilice una identidad del ángulo doble.

(c) $\operatorname{sen} 4x = 8 \operatorname{sen} x \cos^3 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x$. *Sugerencia:* utilice dos veces una identidad del ángulo doble.

(d) $(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$

13. Verifique que las siguientes son identidades.

(a) $\dfrac{\operatorname{sen} u}{\csc u} + \dfrac{\cos u}{\sec u} = 1$

(b) $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

(c) $\operatorname{sen} t(\csc t - \operatorname{sen} t) = \cos^2 t$

(d) $\dfrac{1 - \csc^2 t}{\csc^2 t} = \dfrac{-1}{\sec^2 t}$

14. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones en $[-\pi, 2\pi]$.

(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = 2 \operatorname{sen} t$

(c) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (d) $y = \sec t$

15. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones en $[-\pi, 2\pi]$.

(a) $y = \csc t$ (b) $y = 2\cos t$

(c) $y = \cos 3t$ (d) $y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

Determine el periodo, amplitud y corrimiento (tanto horizontal como vertical) y dibuje una gráfica en el intervalo $-5 \le x \le 5$ para las funciones listadas en los problemas del 16 al 23.

16. $y = 3\cos\frac{x}{2}$ **17.** $y = 2\,\text{sen}\,2x$

18. $y = \tan x$ **19.** $y = 2 + \frac{1}{6}\cot 2x$

20. $y = 3 + \sec(x - \pi)$ **21.** $y = 21 + 7\,\text{sen}(2x + 3)$

22. $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **23.** $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

24. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la misma gráfica? Verifique su resultado de manera analítica por medio de identidades trigonométricas.

(a) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $y = -\text{sen}(x + \pi)$ (d) $y = \cos(x - \pi)$

(e) $y = -\text{sen}(\pi - x)$ (f) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(g) $y = -\cos(\pi - x)$ (h) $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

25. ¿Cuáles de las siguientes son funciones impares? ¿Cuáles funciones pares? ¿Y cuáles ninguna de éstas?

(a) $t\,\text{sen}\,t$ (b) $\text{sen}^2 t$ (c) $\csc t$

(d) $|\text{sen}\,t|$ (e) $\text{sen}(\cos t)$ (f) $x + \text{sen}\,x$

26. ¿Cuáles de las siguiente son funciones impares? ¿Cuáles funciones pares? ¿Y cuáles ninguna de éstas?

(a) $\cot t + \text{sen}\,t$ (b) $\text{sen}^3 t$ (c) $\sec t$

(d) $\sqrt{\text{sen}^4 t}$ (e) $\cos(\text{sen}\,t)$ (f) $x^2 + \text{sen}\,x$

Determine los valores exactos en los problemas del 27 al 31. Sugerencia: las identidades del medio ángulo pueden serle útiles.

27. $\cos^2\frac{\pi}{3}$ **28.** $\text{sen}^2\frac{\pi}{6}$

29. $\text{sen}^3\frac{\pi}{6}$ **30.** $\cos^2\frac{\pi}{12}$

31. $\text{sen}^2\frac{\pi}{8}$

32. Determine las identidades análogas a las identidades de suma de ángulos para cada expresión.

(a) $\text{sen}(x - y)$ (b) $\cos(x - y)$ (c) $\tan(x - y)$

33. Utilice la identidad de suma de ángulo para la tangente, a fin de demostrar que $\tan(t + \pi) = \tan t$ para toda t en el dominio de $\tan t$.

34. Demuestre que $\cos(x - \pi) = -\cos x$ para toda x.

≈ [C] **35.** Suponga que la llanta de un camión tiene un radio exterior de 2.5 pies. ¿Cuántas revoluciones por minuto gira la llanta cuando el camión está viajando a 60 millas por hora?

≈ **36.** ¿Cuánto avanza una rueda, de radio 2 pies, que gira al nivel del piso dando 150 revoluciones?

≈ [C] **37.** Una banda pasa por dos poleas, como se muestra en la figura 15. ¿Cuántas revoluciones por segundo gira la polea pequeña cuando la polea grande gira a 21 revoluciones por segundo?

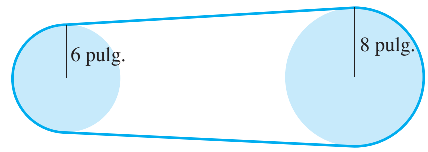


Figura 15

38. El **ángulo de inclinación** α de una recta es el ángulo positivo más pequeño, a partir del eje x a la recta ($\alpha = 0$, para una recta horizontal). Demuestre que la pendiente m de la recta es igual a tan a.

39. Determine el ángulo de inclinación de las siguientes rectas (véase el problema 38).

(a) $y = \sqrt{3}x - 7$ (b) $\sqrt{3}x + 3y = 6$

40. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas no verticales, que se intersectan, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si θ, el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2, no es un ángulo recto, entonces

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Demuestre esto utilizando el hecho de que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ en la figura 16.

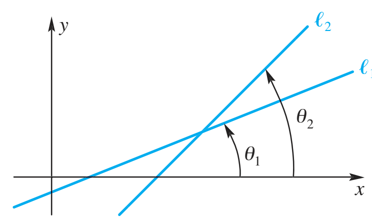


Figura 16

[C] **41.** Determine el ángulo (en radianes) de la primera a la segunda recta (véase el problema 40).

(a) $y = 2x,\ y = 3x$ (b) $y = \frac{x}{2},\ y = -x$

(c) $2x - 6y = 12,\ 2x + y = 0$

42. Deduzca la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2 t$ para el área de un sector circular. Aquí, r es el radio y t es la medida en radianes del ángulo central (véase la figura 17).

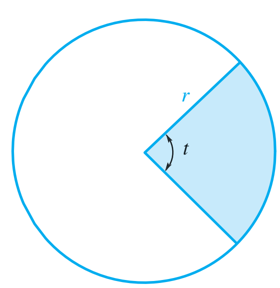


Figura 17

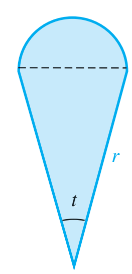


Figura 18

43. Determine el área del sector de un círculo de radio 5 centímetros y ángulo central de 2 radianes (véase el problema 42).

44. Un polígono regular de n lados está inscrito en un círculo de radio r. Determine fórmulas para el perímetro, P, y el área, A, del polígono en términos de n y r.

45. Un triángulo isósceles está coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura 18. Encuentre una fórmula para el área A de la figura completa, en términos de la longitud del lado r y el ángulo t (radianes). (Decimos que A es una función de las dos variables independientes r y t.)

46. A partir de una identidad multiplicativa obtenemos

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}x\right) + \cos\left(\frac{1}{4}x\right)\right]$$

Determine la correspondiente suma de cosenos para

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}$$

¿Puede visualizar una generalización?

47. La temperatura alta normal para Las Vegas, Nevada, es de 55°F para el 15 de enero y 105° para el 15 de julio. Suponiendo que éstas sean las temperaturas superior e inferior para el año, utilice esta información para aproximar la temperatura alta promedio para el 15 de noviembre.

48. Con frecuencia, las mareas se miden por medio de marcas de altura arbitrarias en alguna localidad. Suponga que una marea alta ocurre al mediodía cuando el nivel del agua está en 12 pies. Seis horas más tarde, sucede una marea baja con un nivel de 5 pies, y a medianoche tiene lugar otra marea alta con un nivel del agua de 12 pies. Suponiendo que el nivel del agua es periódico, utilice esta información para determinar una fórmula que proporcione el nivel del agua como una función del tiempo. Luego utilice esta función para aproximar el nivel del agua a las 5:30 p. m.

EXPL **49.** El movimiento circular puede modelarse mediante la representación paramétrica de la forma $x(t) = \text{sen } t$ y $y(t) = \cos t$. (Una *representación paramétrica* significa que una variable, en este caso t, determina a $x(t)$ y $y(t)$.) Ésta dará el círculo completo para $0 \le t \le 2\pi$. Si consideramos una rueda con un diámetro de 4 pies que gira en el sentido de las manecillas del reloj una vez cada 10 segundos, demuestre que el movimiento de un punto en la periferia de la rueda puede representarse por medio de $x(t) = 2\text{sen}(\pi t/5)$ y $y(t) = 2\cos(\pi t/5)$.

(a) Determine las posiciones del punto en el borde de la rueda cuando $t = 2, 6$ y 10 segundos. ¿En dónde estaba este punto cuando la rueda comenzó a girar en $t = 0$?

(b) Si la rueda está girando en *sentido contrario a las manecillas del reloj*, ¿cómo cambiarían las fórmulas para dar el movimiento del punto?

(c) ¿Para qué valor de t el punto está en $(2, 0)$ por primera vez?

EXPL **50.** La frecuencia circular v de oscilación de un punto está dada por $v = \dfrac{2\pi}{\text{periodo}}$. ¿Qué sucede cuando suma dos movimientos que tienen la misma frecuencia o periodo? Para investigar, podemos graficar las funciones $y(t) = 2\text{sen}(\pi t/5)$ y $y(t) = \text{sen}(\pi t/5) + \cos(\pi t/5)$ y buscar semejanzas. Armados con esta información, podemos investigar mediante la graficación de las funciones siguientes en el intervalo $[-5, 5]$:

(a) $y(t) = 3\,\text{sen}(\pi t/5) - 5\cos(\pi t/5) + 2\,\text{sen}((\pi t/5) - 3)$

(b) $y(t) = 3\cos(\pi t/5 - 2) + \cos(\pi t/5) + \cos((\pi t/5) - 3)$

EXPL **51.** Ahora exploramos la relación entre $A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$ y $C\,\text{sen}(\omega t + \phi)$.

(a) Desarrollando $\text{sen}(wt + \phi)$ por medio de la fórmula para la suma de ángulos, demuestre que las dos expresiones son equivalentes si $A = C\cos\phi$ y $B = C\,\text{sen}\,\phi$.

(b) En consecuencia, demuestre que $A^2 + B^2 = C^2$ y que entonces ϕ satisface la ecuación $\tan\phi = \dfrac{B}{A}$.

(c) Generalice su resultado para establecer una proposición acerca de $A_1\,\text{sen}(\omega t + \phi_1) + A_2\,\text{sen}(\omega t + \phi_2) + A_3\,\text{sen}(\omega t + \phi_3)$.

(d) Escriba un ensayo, con sus propias palabras, que exprese la importancia de la identidad entre $A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$ y $C\,\text{sen}(\omega t + \phi)$. Asegúrese de observar que $|C| \ge \text{máx}(|A|, |B|)$ y que la identidad sólo se cumple cuando usted forma una combinación lineal (sumando y/o restando múltiplos de una sola potencia) de senos y cosenos con la misma frecuencia.

Las funciones trigonométricas que tienen frecuencias altas plantean problemas especiales para su graficación. Ahora exploramos cómo graficar tales funciones.

GC **52.** Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$; use la ventana dada por un rango de y de $-1.5 \le y \le 1.5$ y rango de x dado por

(a) $[-15, 15]$ (b) $[-10, 10]$ (c) $[-8, 8]$

(d) $[-1, 1]$ (e) $[-0.25, 0.25]$

Indique brevemente cuál ventana de x muestra el comportamiento verdadero de la función, y discuta las razones por las que otras ventanas dan resultados que son diferentes.

GC **53.** Grafique la función $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{50}\text{sen } 50x$; utilice la ventana dada por los siguientes rangos para x y y.

(a) $-5 \le x \le 5, -1 \le y \le 1$

(b) $-1 \le x \le 1, 0.5 \le y \le 1.5$

(c) $-0.1 \le x \le 0.1, 0.9 \le y \le 1.1$

De manera breve indique cuál ventana (x, y) muestra el verdadero comportamiento de la función, y discuta las razones por las que las otras ventanas (x, y) dan resultados que son diferentes. En este caso, ¿es cierto que sólo una de las ventanas proporciona el comportamiento importante, o necesitamos más de una ventana para comunicar de manera gráfica el comportamiento de esta función?

GC EXPL **54.** Sean $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{100}\cos(100x)$.

(a) Utilice la composición de funciones para formar $h(x) = (f \circ g)(x)$, así como $j(x) = (g \circ f)(x)$.

(b) Determine la ventana o ventanas adecuadas que proporcionen una representación clara de $h(x)$.

(c) Determine la ventana o ventanas adecuadas que proporcionen una representación clara de $j(x)$.

55. Suponga que una función continua es periódica con periodo 1 y es lineal entre 0 y 0.25, y lineal entre -0.75 y 0. Además, tiene el valor 1 en 0 y 2 en 0.25. Bosqueje la función en el dominio $[-1, 1]$ y proporcione una definición por partes de la función.

56. Suponga que una función continua es periódica con periodo 2 y es cuadrática entre -0.25 y 0.25, y lineal entre -1.75 y -0.25. Además, tiene el valor 0 en 0 y 0.0625 en ± 0.25. Bosqueje la función en el dominio $[-2, 2]$ y proporcione una definición por partes de la función.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(-\infty, \infty)$; $[-1, 1]$ **2.** 2π; 2π; π **3.** impar; par **4.** $-4/5$

0.8 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes aseveraciones. Esté preparado para justificar su respuesta. Por lo común, esto significa que usted debe proporcionar una razón si responde verdadero y dar un contraejemplo si responde falso.

1. Cualquier número que puede escribirse como una fracción p/q es racional.

2. La diferencia de cualesquiera dos números racionales es racional.

3. La diferencia de cualesquiera dos números irracionales es irracional.

4. Entre dos números irracionales distintos siempre hay otro número irracional.

5. $0.999\ldots$ (los 9 se repiten) es menor que 1.

6. La operación de exponenciación es conmutativa; esto es, $(a^m)^n = (a^n)^m$.

7. La operación * definida por $m*n = m^n$ es asociativa.

8. Las desigualdades $x \leq y$, $y \leq z$ y $z \leq x$, juntas, implican que $x = y = z$.

9. Si $|x| < \varepsilon$ para todo número positivo ε , entonces $x = 0$.

10. Si x y y son números reales, entonces $(x-y)(y-x) \leq 0$.

11. Si $a < b < 0$, entonces $1/a > 1/b$.

12. Es posible que dos intervalos cerrados tengan exactamente un punto en común.

13. Si dos intervalos abiertos tienen un punto en común, entonces tienen un número infinito de puntos en común.

14. Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.

15. Si x es un número real, entonces $|-x| = x$.

16. Si $|x| < |y|$, entonces $x < y$.

17. Si $|x| < |y|$, entonces $x^4 < y^4$.

18. Si x y y son negativos, entonces $|x + y| = |x| + |y|$.

19. Si $|r| < 1$, entonces $\dfrac{1}{1+|r|} \leq \dfrac{1}{1-r} \leq \dfrac{1}{1-|r|}$.

20. Si $|r| > 1$, entonces $\dfrac{1}{1-|r|} \leq \dfrac{1}{1-r} \leq \dfrac{1}{1+|r|}$.

21. Siempre es cierto que $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

22. Para cada número real positivo y existe un número real x, tal que $x^2 = y$.

23. Para cada número real y existe un número real x, tal que $x^3 = y$.

24. Es posible tener una desigualdad cuyo conjunto solución consista exactamente en un número.

25. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + y = 0$ representa un circunferencia para todo número real a.

26. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + by = c$ representa una circunferencia para todos los números reales a, b, c.

27. Si (a, b) pertenece a una recta con pendiente $\frac{3}{4}$, entonces $(a + 4, b + 3)$ también está en esa recta.

28. Si (a, b), (c, d) y (e, f) están en la misma recta, entonces $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a-e}{b-f} = \dfrac{e-c}{f-d}$, siempre que los tres números sean diferentes.

29. Si $ab > 0$, entonces (a, b) está en el primero o en el tercer cuadrante.

30. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número positivo x tal que $x < \varepsilon$.

31. Si $ab = 0$, entonces (a, b) está en alguno de los ejes coordenados x o y.

32. Si $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1|$, entonces (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma recta horizontal.

33. La distancia entre $(a + b, a)$ y $(a - b, a)$ es $|2b|$.

34. La ecuación de cualquier recta puede escribirse en la forma punto–pendiente.

35. La ecuación de cualquier recta puede escribirse en la forma lineal general $Ax + By + C = 0$.

36. Si dos rectas no verticales son paralelas, tienen la misma pendiente.

37. Es posible que dos rectas tengan pendientes positivas y sean perpendiculares.

38. Si las intersecciones de una recta con el eje x y el eje y son racionales distintos de cero, entonces la pendiente de la recta es racional.

39. Las rectas $ax + y = c$ y $ax - y = c$ son perpendiculares.

40. $(3x - 2y + 4) + m(2x + 6y - 2) = 0$ es la ecuación de una recta para cada número real m.

41. El dominio natural de

$$f(x) = \sqrt{-(x^2 + 4x + 3)}$$

es el intervalo $-3 \leq x \leq -1$.

42. El dominio natural de $T(\theta) = \sec(\theta) + \cos(\theta)$ es $(-\infty, \infty)$.

43. El rango de $f(x) = x^2 - 6$ es el intervalo $[-6, \infty)$.

44. El rango de la función $f(x) = \tan x - \sec x$ es el conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

45. El rango de la función $f(x) = \csc x - \sec x$ es el conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

46. La suma de dos funciones pares es una función par.

47. La suma de dos funciones impares es una función impar.

48. El producto de dos funciones impares es una función impar.

49. El producto de una función par con una función impar es una función impar.

50. La composición de una función par con una función impar es una función impar.

51. La composición de dos funciones impares es una función par.

52. La función $f(x) = (2x^3 + x)/(x^2 + 1)$ es impar.

53. La función

$$f(t) = \frac{(\operatorname{sen} t)^2 + \cos t}{\tan t \csc t}$$

es par

54. Si el rango de una función consiste en un solo número, entonces su dominio también consiste en un solo número.

55. Si el dominio de una función contiene al menos dos números, entonces el rango también contiene al menos dos números.

56. Si $g(x) = [\![x/2]\!]$, entonces $g(-1.8) = -1$.

57. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, entonces $f \circ g = g \circ f$.

58. Si $f(x) = x^2$ si $g(x) = x^3$, entonces $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

59. Si f y g tienen el mismo dominio, entonces f/g también tiene ese dominio.

60. Si la gráfica de $y = f(x)$ tiene una intersección con el eje x en $x = a$, entonces la gráfica de $y = f(x + h)$ tiene una intersección con el eje x en $x = a - h$.

61. La cotangente es una función impar.

62. El dominio natural de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

63. Si $\cos s = \cos t$, entonces $s = t$.

Conjunto de problemas de práctica

1. Calcule cada valor para $n = 1, 2$ y -2.

(a) $\left(n + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (b) $(n^2 - n + 1)^2$

(c) $4^{3/n}$ (d) $\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n}\right|}$

2. Simplifique

(a) $\left(1 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)^{-1}$

(b) $\dfrac{\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{x}{x^2 - x - 2}}{\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-2}}$

(c) $\dfrac{t^3 - 1}{t - 1}$

3. Muestre que el promedio de dos números racionales es un número racional.

4. Escriba el decimal periódico 4.1282828… como un cociente de dos enteros.

5. Encuentre un número irracional entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{13}{25}$.

C **6.** Calcule $\left(\sqrt[3]{8.15 \times 10^4} - 1.32\right)^2/3.24$.

C **7.** Calcule $\left(\pi - \sqrt{2.0}\right)^{2.5} - \sqrt[3]{2.0}$.

C **8.** Calcule $\operatorname{sen}^2(2.45) + \cos^2(2.40) - 1.00$.

En los problemas del 9 al 18 determine el conjunto solución en la recta real y exprese este conjunto en la notación de intervalo.

9. $1 - 3x > 0$ **10.** $6x + 3 > 2x - 5$

11. $3 - 2x \leq 4x + 1 \leq 2x + 7$

12. $2x^2 + 5x - 3 < 0$ **13.** $21t^2 - 44t + 12 \leq -3$

14. $\dfrac{2x - 1}{x - 2} > 0$

15. $(x + 4)(2x - 1)^2(x - 3) \leq 0$

16. $|3x - 4| < 6$

17. $\dfrac{3}{1 - x} \leq 2$

18. $|12 - 3x| \geq |x|$

19. Determine un valor de x para el cual $|-x| \neq x$.

20. ¿Para cuáles valores de x se cumple la ecuación $|-x| = x$?

21. ¿Para cuáles valores de t se cumple la ecuación $|t - 5| = 5 - t$?

22. ¿Para cuáles valores de a y t se cumple la ecuación $|t - a| = a - t$?

23. Suponga que $|x| \leq 2$. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que

$$\left|\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2}\right| \leq 8$$

24. Escriba una proposición que incluya la palabra *distancia* para expresar las siguientes proposiciones algebraicas:

(a) $|x - 5| = 3$ (b) $|x + 1| \leq 2$

(c) $|x - a| > b$

25. Haga un bosquejo del triángulo con vértices $A(-2, 6)$, $B(1, 2)$ y $C(5, 5)$ y demuestre que es un triángulo rectángulo.

26. Determine la distancia de $(3, -6)$ al punto medio del segmento de recta que va de $(1, 2)$ a $(7, 8)$.

27. Determine la ecuación de la circunferencia con diámetro AB, si $A = (2, 0)$ y $B = (10, 4)$.

28. Determine el centro y el radio de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

29. Determine la distancia entre los centros de las circunferencias con ecuaciones

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2 \quad \text{y} \quad x^2 + 6x + y^2 - 4y = -7$$

30. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto indicado y que es paralela a la recta que se indica; además, bosqueje ambas rectas.

(a) $(3, 2)$: $3x + 2y = 6$ (b) $(1, -1)$: $y = \frac{2}{3}x + 1$

(c) $(5, 9)$: $y = 10$ (d) $(-3, 4)$: $x = -2$

31. Escriba la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 1)$ y que

(a) pasa por $(7, 3)$;

(b) es paralela a $3x - 2y = 5$;

(c) es perpendicular a $3x + 4y = 9$;

(d) es perpendicular a $y = 4$;

(e) tiene intersección con el eje y igual a 3.

32. Muestre que $(2, -1)$, $(5, 3)$ y $(11, 11)$ están en la misma recta.

33. ¿Cuál ecuación puede representar la curva de la figura 1?

(a) $y = x^3$ (b) $x = y^3$

(c) $y = x^2$ (d) $x = y^2$

34. ¿Cuál ecuación puede representar la curva de la figura 2?

(a) $y = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, $b > 0$, y $c > 0$

(b) $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$, $b > 0$, y $c > 0$

(c) $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$, $b > 0$, y $c < 0$

(d) $y = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, $b > 0$, y $c < 0$

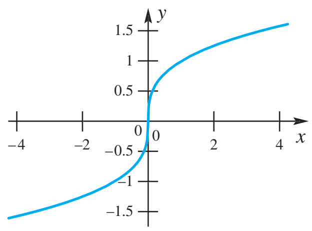


Figura 1

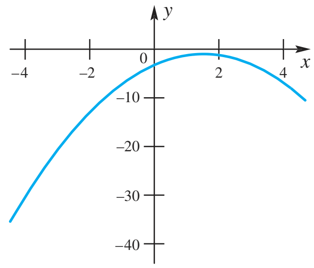


Figura 2

En los problemas del 35 al 38 bosqueje la gráfica de cada ecuación.

35. $3y - 4x = 6$ **36.** $x^2 - 2x + y^2 = 3$

GC **37.** $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ GC **38.** $x = y^2 - 3$

GC **39.** Determine los puntos de intersección de las gráficas de $y = x^2 - 2x + 4$ y $y - x = 4$.

40. Entre todas las rectas perpendiculares a $4x - y = 2$, encuentre la ecuación de aquella que, junto con la parte positiva del eje x y del eje y, forma un triángulo de área 8.

41. Para $f(x) = 1/(x + 1) - 1/x$, determine cada valor (si esto es posible)

(a) $f(1)$ (b) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $f(-1)$

(d) $f(t - 1)$ (e) $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$

42. Para $g(x) = (x + 1)/x$, encuentre y simplifique cada valor.

(a) $g(2)$ (b) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) $\dfrac{g(2 + h) - g(2)}{h}$

43. Describa el dominio natural de cada función.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (b) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

44. ¿Cuál de las funciones siguientes son impares? ¿Cuáles son pares? ¿Y cuáles no son pares ni impares?

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ (b) $g(x) = |\operatorname{sen} x| + \cos x$

(c) $h(x) = x^3 + \operatorname{sen} x$ (d) $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{|x| + x^4}$

45. Dibuje la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = x^2 - 1$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46. Suponga que f es una función par que satisface $f(x) = -1 + \sqrt{x}$ para $x \ge 0$. Dibuje la gráfica de f para $-4 \le x \le 4$.

47. Una caja abierta se fabrica cortando cuadrados, de lado x pulgadas, en cada una de las cuatro esquinas de una hoja de cartón, de 24 por 32 pulgadas, y luego doblando hacia arriba los lados. Exprese el volumen $V(x)$ en términos de x. ¿Cuál es dominio para esta función?

48. Sea $f(x) = x - 1/x$ y $g(x) = x^2 + 1$. Encuentre cada valor.

(a) $(f + g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(2)$ (c) $(f \circ g)(2)$

(d) $(g \circ f)(2)$ (e) $f^3(-1)$

(f) $f^2(2) + g^2(2)$

49. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones; haga uso de traslaciones.

(a) $y = \frac{1}{4}x^2$ (b) $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$

(c) $y = -1 + \frac{1}{4}(x + 2)^2$

50. Sea $f(x) = \sqrt{16 - x}$ y $g(x) = x^4$. ¿Cuál es el dominio de cada una de las siguientes funciones?

(a) f (b) $f \circ g$ (c) $g \circ f$

51. Escriba $F(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$ como la composición de cuatro funciones, $f \circ g \circ h \circ k$.

52. Calcule cada una de las siguientes expresiones sin utilizar una calculadora.

(a) $\operatorname{sen} 570°$ (b) $\cos \dfrac{9\pi}{2}$

(c) $\cos\left(\dfrac{-13\pi}{6}\right)$

53. Si $\operatorname{sen} t = 0.8$ y $\cos t < 0$, determine cada valor.

(a) $\operatorname{sen}(-t)$ (b) $\cos t$ (c) $\operatorname{sen} 2t$

(d) $\tan t$ (e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ (f) $\operatorname{sen}(\pi + t)$

54. Escriba $\operatorname{sen} 3t$ en términos de $\operatorname{sen} t$. *Sugerencia:* $3t = 2t + t$.

55. Una mosca está en el borde de una rueda que gira a una velocidad de 20 revoluciones por minuto. Si el radio de la rueda es de 9 pulgadas, ¿cuánto recorre la mosca en 1 segundo?

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

1. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $1 < 2x + 1 < 5$ (b) $-3 < \frac{x}{2} < 8$

2. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $14 < 2x + 1 < 15$ (b) $-3 < 1 - \frac{x}{2} < 8$

3. Resuelva $|x - 7| = 3$ para x.

4. Resuelva $|x + 3| = 2$ para x.

5. La distancia a lo largo de la recta numérica entre x y 7 es igual a 3. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

6. La distancia a lo largo de la recta numérica entre x y 7 es igual a d. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

7. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 7| < 3$ (b) $|x - 7| \leq 3$

(c) $|x - 7| \leq 1$ (d) $|x - 7| < 0.1$

8. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 2| < 1$ (b) $|x - 2| \geq 1$

(c) $|x - 2| < 0.1$ (d) $|x - 2| < 0.01$

9. ¿Cuáles son los dominios naturales de las siguientes funciones?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$

10. ¿Cuáles son los dominios naturales de las siguientes funciones?

(a) $F(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (b) $G(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

11. Evalúe las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del problema 9 en los siguientes valores de x: 0, 0.9, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.1, 2.

12. Evalúe las funciones $F(x)$ y $G(x)$ del problema 10 en los siguientes valores de x: $-1, -0.1, -0.01, -0.001, 0.001, 0.01, 0.1, 1$.

13. La distancia entre x y 5 es menor que 0.1. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

14. La distancia entre x y 5 es menor que e, donde e es un número positivo. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

15. Verdadero o falso. Suponga que a, x y y son números reales y n es un número natural.

(a) Para toda $x > 0$ existe una y, tal que $y > x$.

(b) Para toda $a \geq 0$ existe una n, tal que $\frac{1}{n} < a$.

(c) Para toda $a > 0$ existe una n, tal que $\frac{1}{n} < a$.

(d) Para toda circunferencia C en el plano existe una n, tal que la circunferencia C y su interior se encuentran dentro de n unidades del origen.

16. Utilice la identidad aditiva para la función seno, a fin de determinar $\operatorname{sen}(c + h)$ en términos de $\operatorname{sen} c$, $\operatorname{sen} h$, $\cos c$ y $\cos h$.